Неабелевы глобальные симметрии.

Пусть ϕ – некоторые поля, и пусть их лагранжиан L инвариантен относительно действия преобразований из некоторой группы Ли G:

$$\phi \to \phi' = T(\omega)\phi,$$

$\omega \in G$. Инфинитезимальные преобразования:

$$\phi_i(x) \to \phi_i'(x) = \phi_i(x) + i\epsilon^a t^a_{ij}\phi_j(x),$$

t^a – матрицы представления, соответствующие генераторам, $[t^a, t^b] = iC_{abc}t^c$.

Теорема Нетер: ток

$$J^a_\mu = -i\frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu\phi_i)}t^a_{ij}\phi_j$$

сохраняется, $\partial_\mu J^a_\mu = 0$.

Пример 1: модель N комплексных скалярных полей ϕ_i,

$$L = |\partial_\mu\phi_i|^2 - m^2|\phi_i|^2 - \lambda|\phi_i|^4.$$

Глобальные симметрии:

1. $U(1)$: $\phi_i \mapsto \mathrm{e}^{i\alpha}\phi_i$, ток $j_\mu = i(\phi_i^*\partial_\mu\phi_i - \phi_i\partial_\mu\phi_i^*)$.

2. $SU(N)$: $\phi_i \mapsto \omega_{ij}\phi_j$, $\omega \in SU(N)$. Столбец ϕ преобразуется по фундаментальному представлению $SU(N)$: $\phi \mapsto \omega\phi$. Ток

$$J^a_\mu = i(\phi_i^\dagger T^a_{ij}\partial_\mu\phi_j - \partial_\mu\phi_i^\dagger T^a_{ij}\phi_j).$$

Пример 2: модель трех действительных скалярных полей ϕ^a, преобразующихся по присоединенному представлению группы $SU(2)$:

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^a\partial_\mu\phi^a - \frac{m^2}{2}\phi^a\phi^a - \frac{\lambda}{4}\left(\phi^a\phi^a\right)^2,$$

где $a = 1, 2, 3$. Обозначим

$$\phi(x) = \frac{\tau^a}{2}\phi^a(x),$$

тогда действие присоединенного представления

$$\phi \mapsto \omega\phi\omega^{-1}, \quad \omega \in SU(2),$$

а лагранжиан запишется в виде

$$L = \mathrm{Tr}\left(\partial_\mu\phi\right)^2 - V\left(\mathrm{Tr}(\phi^2)\right).$$

Пример 3: модель трех действительных скалярных полей ϕ^a, $a = 1, 2, 3$, на которые наложено условие

$$\phi^a(x)\phi^a(x) = 1,$$

то есть поля принимают значения на сфере единичного радиуса в пространстве полей; независимых полей два;

$$L = \frac{1}{2g^2}\partial_\mu\phi^a\partial_\mu\phi^a.$$

Вектор $\{\phi^a\}$ преобразуется по фундаментальному представлению группы $O(3)$.

Пример 4: $\phi(x) \in SU(2)$ – матрица 2×2 из группы. Группа глобальных симметрий $SU(2)_L \times SU(2)_R$:

$$\phi \mapsto \omega_L \phi \omega_R, \quad \omega_L \in SU(2)_L,\ \omega_R \in SU(2)_R,$$

$$L = \frac{F^2}{2} \mathrm{Tr}\left(\partial_\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi\right) + \frac{g^2}{16} \mathrm{Tr}\left(\left[\phi^\dagger \partial_\mu \phi, \phi^\dagger \partial_\nu \phi\right]^2\right).$$

Теорема Голдстоуна.

Пусть лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial_\mu \phi^i - V(\phi^i)$$

инвариантен относительно *глобальных* преобразований, при которых поля ϕ^i преобразуются по представлению $T(\omega)$ группы G,

$$\phi^i \mapsto \phi^i + \epsilon_a t_a^{ij} \phi^j + \ldots$$

Пусть основное состояние $\phi_i = v_i$ инвариантно относительно не всей G, а относительно подгруппы $H \subset G$. Пусть генераторы $t^{\tilde{a}}$, $\tilde{a} = 1, \ldots, M$, образуют базис в H ("ненарушенные"), а остальные, T^α, $\alpha = M+1, \ldots, N$, его пополняют ("нарушенные"). Тогда каждому из нарушенных генераторов соответствует безмассовое поле в спектре линейных возбуждений над вакуумом V, причем эти поля линейно независимы.

Доказательство. По теореме Нетер, каждому из генераторов t^a соответствует сохраняющийся ток J_μ^a, $\partial_\mu J_\mu^a = 0$. Под действием преобразований из подгруппы H (т.е. соответствующих генераторам $t^{\tilde{a}}$) вакуум v переходит в себя, поэтому $t_{ij}^{\tilde{a}} v_j = 0$ и $J_\mu^{\tilde{a}} = \mathcal{O}(\psi^2)$, где ψ_i – малые возмущения, $\phi_i = v_i + \psi_i$. В то же время $J_\mu^\alpha = \partial_\mu \psi^i u_i^\alpha + \mathcal{O}(\psi^2)$, где $u_i^\alpha = t_{ij}^\alpha v_j$. Из сохранения тока следует $\partial_\mu^2 \theta^\alpha = \mathcal{O}(\psi^2)$, где $\theta^\alpha = \psi^i u_i^\alpha$ – безмассовые поля.

Пусть $m^2 = -\mu^2 < 0$ в модели Примера 2. Множество вакуумов – сфера в трехмерном пространстве полей $\phi^i \phi^i = v^2$, $v = \mu/\sqrt{\lambda}$. Группа симметрий $G = SO(3)$, ненарушенная подгруппа $H = SO(2)$. Два голдстоуновских бозона.

Эффективные киральные лагранжианы.

Низкоэнергетическая эффективная теория:

- описывает всю динамику безмассовых степеней свободы,
- взаимодействие инвариантно относительно *группы* симметрий лагранжиана,
- низкоэнергетическое $\Rightarrow$ мало производных.

Любую полупростую группу Ли G с заданной подгруппой H можно определить как группу движений некоторого однородного пространства со стационарной подгруппой H, оставляющей неподвижной начало координат.

Однородное пространство A: каждому $g \in G \mapsto (F(g) : A \to A)$, обратимое и согласованное с групповой операцией; $\forall a, a' \in A \exists g \in G : a' = F(g)a$ (транзитивность).

Динамика голдстоуновских частиц – геометрия однородного пространства.

Пример: $G = SU(2)_L \times SU(2)_R \sim SO(4)$, $H = SU(2)_d \sim SO(3)$. Голдстоуновские бозоны – π^a – удобно описывать матрицей $U = \exp(i \frac{\tau^a}{2} \frac{\pi^a}{f_\pi}) \in SU(2)$.

Задачи

1. В модели Примера 2 найти сохраняющийся ток по теореме Нетер.

2. В модели Примера 3 построить явный вид представления и с его помощью показать, что лагранжиан и дополнительное условие инвариантны относительно преобразований из группы $O(3)$.

3. В модели Примера 3 найти уравнения движения для полей ϕ^a.

4. Пусть комплексные двухкомпонентные столбцы ϕ, χ преобразуются по фундаментальному представлению $SU(2)$, а комплексное однокомпонентное скалярное поле ξ инвариантно относительно этой группы:
$$\phi \mapsto \omega\phi, \quad \chi \mapsto \omega\chi, \quad \xi \mapsto \xi,$$
где $\omega \in SU(2)$. Пусть эти же поля преобразуются под действием группы $U(1)$ с разными зарядами:
$$\phi \mapsto \mathrm{e}^{iq_\phi\alpha}\phi, \quad \chi \mapsto \mathrm{e}^{iq_\chi\alpha}\chi, \quad \xi \mapsto \mathrm{e}^{iq_\xi\alpha}\xi,$$
где $\mathrm{e}^{i\alpha} \in U(1)$. Построить инвариантный относительно $SU(2) \times U(1)$ лагранжиан для двух случаев:
$$q_\chi + q_\xi = \pm q_\phi.$$

5. Показать явно, что поля $\theta^\alpha = \psi_i u_i^\alpha$ – безмассовые. Отнормировать их, чтобы они имели канонический кинетический член.

6. Рассмотрим теорию трех комплексных скалярных полей $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, с лагранжианом
$$L = \partial_\mu f_i^* \partial_\mu f_i + \mu^2 f_i^* f_i - \lambda (f_i^* f_i)^2 \ .$$
   1) Найти группу глобальной симметрии этого лагранжиана.

   2) Найти множество основных состояний модели. Выбрав одно из них, найти ненарушенную подгруппу.

   3) Рассматривая возбуждения над основным состоянием, найти намбу-голдстоуновские моды и массы остальных возбуждений.

   4) По каким представлениям ненарушенной подгруппы преобразуются намбу-голдстоуновские моды и массивные моды?

7. Рассмотрим модель двух комплексных скалярных полей φ_1 и φ_2 с лагранжианом
$$L = \partial_\mu \phi_1^* \partial_\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2^* \partial_\mu \phi_2 - \lambda(\varphi_1^*\varphi_1 - \varphi_2^*\varphi_2 - v^2)^2$$
   1) Найти группу глобальной симметрии этого лагранжиана (указание: ограничиться компактными группами).

   2) Найти множество классических вакуумов в модели. Найти ненарушенную подгруппу для каждого вакуума.

   3) Найти спектр малых возбуждений относительно каждого из вакуумов. Какие вакуумы являются физически эквивалентными, а какие — нет? Выполняется ли теорема Голдстоуна? Совпадает ли количество безмассовых возбуждений с количеством ненарушенных генераторов? Почему?

8. Рассмотрим теорию комплексных скалярных полей $\phi_{a\alpha}$, инвариантную относительно действия $SU(2)_1 \times SU(2)_2$:

$$\phi_{a\alpha} \mapsto \omega_{ab}\phi_{b\alpha}, \quad \omega_{ab} \in SU(2)_1; \qquad \phi_{a\alpha} \mapsto \omega_{\alpha\beta}\phi_{a\beta}, \quad \omega_{\alpha\beta} \in SU(2)_2.$$

   Подобрать потенциал таким образом, чтобы симметрия нарушалась до диагональной подгруппы $SU(2)_d$.

9. Показать, что в конечной окрестности вакуума модель $[SU(2)_1 \times SU(2)_2]/SU(2)_d$ эквивалентна модели $SO(4)/SO(3)$.