

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА КОСМОЛОГИИ И ФИЗИКИ ЧАСТИЦ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕШЕНИЯ В МОДЕЛЯХ ДВУМЕРНОЙ ГРАВИТАЦИИ.

Выполнил студент 443 группы
Еремеев Дмитрий Валерьевич
_____ Еремеев Д.В.

научный руководитель, к.ф.м.н.,
Левков Дмитрий Геннадиевич
_____ Левков Д.Г.

Допущен к защите _____
Зав. кафедрой _____ Рубаков В.А.

Москва
2015

Оглавление

1. Введение	2
2. Модель	3
2.1. Описание модели	3
2.2. Конформная калибровка	3
2.3. Общее решение	4
2.4. Вакуумные решения	7
2.5. Коллапсирующий узкий волновой пакет	9
3. Заключение	13
4. Приложение	14
4.1. Уравнения поля	14
4.2. Пространство AdS_2	16

1. Введение

В настоящий момент в физике прослеживается нетривиальная связь между основными теориями 20 века: квантовой теорией и общей теорией относительности. Одним из важнейших результатов начала 21 века является предположение о связи квантовой конформной теории поля (*CFT*) в плоском пространстве с гравитацией в пространстве анти-де-Ситтера (*AdS*), обладающей дополнительным пространственным измерением. Это предположение легло в основу *AdS/CFT* соответствия [1, 2, 3], которое позволяет вычислять корреляционные функции в теории поля с помощью нахождения классических гравитационных решений в *AdS*. Сейчас *AdS/CFT* соответствие применяют не только к теориям в критических точках, обладающих конформной симметрией, но и реалистичным моделям физики частиц и конденсированного состояния вещества.

К примеру, *AdS/CFT* соответствие позволяет проводить вычисления в теории сильных взаимодействий, используя решения в общей теории относительности. Другим важным вопросом, на который *AdS/CFT* может пролить свет, является физика черных дыр, в частности вопросы, связанные с информационным парадоксом[4]. В результате этого естественным образом возникает интерес к теориям, содержащим пространство анти-де-Ситтера в качестве вакуумного решения.

С другой стороны, имеется класс точно решаемых моделей дилатонной гравитации, один из представителей которых - модель CGHS (Callan–Giddings–Harvey–Strominger)[5, 6]. Модель CGHS определена в асимптотически плоском двумерном пространстве. В то же время, несмотря на наличие точных решений, она достаточно полна, чтобы описывать такие объекты, как гравитационные сингулярности, черные дыры и их формирование.

Таким образом, появляется шанс построить интегрируемую модель AdS/CFT соответствия с помощью модели дилатонной гравитации, содержащей в качестве своего вакуумного решения пространство анти-де-Ситтера или пространство, асимптотически стремящееся к нему.

В данной работе рассматривается модель двумерной дилатонной гравитации, основанная на работе [7]. Получено общее решение в этой модели и вакуумные решения: пространство AdS_2 и пространство, асимптотически стремящееся к нему. Таким образом, данная модель представляет интерес в контексте AdS/CFT соответствия. Нами также описан коллапс узкого волнового пакета в этой модели.

2. Модель

2.1. Описание модели

Мы рассматриваем модель гравитации в 1 + 1 измерениях с дилатонным полем ϕ со следующим действием:

$$A_D = \int d^2x \sqrt{-g} [e^{-2\phi} (R + 4(\nabla\phi)^2) + Ae^{-4\phi} - Ce^{-2\phi}] . \quad (2.1)$$

Здесь R – скаляр Риччи, A и C – константы.

Как и в модели CGHS, мы добавляем безмассовое скалярное поле материи f :

$$A_M = -\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g} (\nabla f)^2 . \quad (2.2)$$

Отметим, что f не взаимодействует с дилатоном.

Заметим, что при выборе констант в действии $A = 0$, $C = -4\lambda^2$ мы получаем действие модели CGHS:

$$A_{CGHS} = \int d^2x \sqrt{-g} [e^{-2\phi} (R + 4(\nabla\phi)^2 + 4\lambda^2)] . \quad (2.3)$$

Варьируя действие (2.1), (2.2) получаем уравнения поля:

$$e^{-2\phi} [R - 4(\nabla\phi)^2 + 2Ae^{-2\phi} + 4\Box\phi - C] = 0 , \quad (2.4)$$

$$e^{-2\phi} \left[2\nabla_\mu \nabla_\nu \phi + g_{\mu\nu} \left(2(\nabla\phi)^2 - 2\Box\phi + \frac{C}{2} - \frac{A}{2}e^{-2\phi} \right) \right] = \frac{T_{\mu\nu}}{2} , \quad (2.5)$$

$$\Box f = 0 , \quad (2.6)$$

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu f \partial_\nu f - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial f)^2 . \quad (2.7)$$

Здесь $T_{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса.

2.2. Конформная калибровка

Будем использовать координаты светового конуса

$$x^\pm \equiv t \pm z , \quad (2.8)$$

где t и z – временная и пространственная координаты соответственно.

Пользуясь ковариантностью уравнений, выберем конформную калибровку для метрики:

$$ds^2 = -e^{2\rho(x^+, x^-)} dx^+ dx^- . \quad (2.9)$$

В компонентах:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{e^{2\rho}}{2} \\ -\frac{e^{2\rho}}{2} & 0 \end{pmatrix} , \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -2e^{-2\rho} \\ -2e^{-2\rho} & 0 \end{pmatrix} . \quad (2.10)$$

Заметим, что после фиксации калибровки (2.9) имеется остаточная калибровочная свобода относительно преобразований вида

$$x^+ \mapsto x'^+ = x'^+(x^+) , \quad x^- \mapsto x'^- = x'^-(x^-) . \quad (2.11)$$

Действительно:

$$ds^2 = -e^{2\rho} \frac{dx^+}{dx'^+} \frac{dx^-}{dx'^-} dx'^+ dx'^- = -e^{2\rho'} dx'^+ dx'^- , \quad (2.12)$$

где введено преобразование конформного фактора:

$$\rho' = \rho + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{dx^+}{dx'^+} \frac{dx^-}{dx'^-} \right) . \quad (2.13)$$

Перепишем уравнения (2.4), (2.5), (2.6), (2.7):

$$2\partial_+ \partial_- \rho + 4\partial_+ \phi \partial_- \phi - 4\partial_+ \partial_- \phi + \frac{e^{2\rho}}{4} [-C + 2Ae^{-2\phi}] = 0 , \quad (2.14)$$

$$e^{-2\phi} [2\partial_+^2 \phi - 4\partial_+ \rho \partial_+ \phi] = \frac{1}{2} (\partial_+ f)^2 , \quad (2.15)$$

$$e^{-2\phi} [2\partial_-^2 \phi - 4\partial_- \rho \partial_- \phi] = \frac{1}{2} (\partial_- f)^2 , \quad (2.16)$$

$$4\partial_+ \phi \partial_- \phi - 2\partial_+ \partial_- \phi - \frac{e^{2\rho}}{2} \left[\frac{C}{2} - \frac{A}{2} e^{-2\phi} \right] = 0 , \quad (2.17)$$

$$\partial_+ \partial_- f = 0 . \quad (2.18)$$

Заметим, что при выборе констант в действии равными $C = -4\lambda^2$, $A = 0$ уравнения в конформной калибровке сводятся к соответствующим уравнениям в модели CGHS.

2.3. Общее решение

Получим общее решение уравнений движения. Для этого вычтем из уравнения (2.17) уравнение (2.14). Получим уравнение Лиувилля:

$$8\partial_+ \partial_- (\rho - \phi) + Ae^{2(\rho - \phi)} = 0 . \quad (2.19)$$

При $A = 0$ это уравнение сводится к волновому уравнению $\partial_+ \partial_- (\rho - \phi) = 0$, как в модели CGHS.

$$\text{Обозначим } X = \rho - \phi : \quad 8\partial_+ \partial_- X + Ae^{2X} = 0 . \quad (2.20)$$

Посмотрим как ведет себя уравнение (2.20) при конформных преобразованиях (2.11):

$$8\partial_+ \partial_- X + Ae^{2X} = 0 \longrightarrow 8\partial'_+ \partial'_- X' + Ae^{2X'} = 0 , \quad \text{где } X = X' + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\partial x'^+}{\partial x^+} \frac{\partial x'^-}{\partial x^-} \right) . \quad (2.21)$$

Таким образом, уравнение Лиувилля является конформно-инвариантным. Если известно какое-то частное решение, то общее решение может быть получено из него конформными преобразованиями.

Покажем, что

$$e^{2X} = e^{2(\rho-\phi)} = \frac{8}{A(x^+ - x^-)^2}. \quad (2.22)$$

является частным решением уравнения (2.20):

$$2X = \ln \left(\frac{8}{A(x^+ - x^-)^2} \right), \quad \partial_+ 2X = \frac{-2}{(x^+ - x^-)}, \quad (2.23)$$

$$4\partial_+ \partial_- 2X + Ae^{2X} = -\frac{8}{(x^+ - x^-)^2} + \frac{8A}{A(x^+ - x^-)^2} = 0. \quad (2.24)$$

Получаем общее решение:

$$e^{2X} = e^{2(\rho-\phi)} = \frac{8\partial_+ \omega^+(x^+) \partial_- \omega^-(x^-)}{A(\omega^+(x^+) - \omega^-(x^-))^2}; \quad (2.25)$$

Здесь $\omega^+(x^+)$, $\omega^-(x^-)$ - произвольные функции своих аргументов.

Теперь найдем решение системы уравнений (2.14) – (2.17). Перепишем ее в более удобном виде:

$$-e^{2X} \partial_+ [e^{-2X} \partial_+ e^{-2\phi}] = \frac{1}{2} (\partial_+ f)^2, \quad (2.26)$$

$$-e^{2X} \partial_- [e^{-2X} \partial_- e^{-2\phi}] = \frac{1}{2} (\partial_- f)^2, \quad (2.27)$$

$$\partial_+ \partial_- f = 0, \quad (2.28)$$

$$\partial_+ \partial_- e^{-2\phi} - \frac{e^{2X}}{2} \left[\frac{C}{2} - \frac{A}{2} e^{-2\phi} \right] = 0, \quad (2.29)$$

$$e^{2X} = \frac{8}{A(x^+ - x^-)^2}, \quad X \equiv \rho - \phi. \quad (2.30)$$

Введем функцию $\Lambda = \Lambda(x^+, x^-)$ так, что

$$e^{-2\phi} = \frac{8\Lambda}{A(x^+ - x^-)}. \quad (2.31)$$

Тогда:

$$e^{2X} \partial_+ [e^{-2X} \partial_+ e^{-2\phi}] = \frac{8\partial_+ \partial_+ \Lambda}{A(x^+ - x^-)}. \quad (2.32)$$

Первое уравнение системы запишется как

$$-\frac{8\partial_+ \partial_+ \Lambda(x^+, x^-)}{A(x^+ - x^-)} = \frac{1}{2} (\partial_+ f)^2. \quad (2.33)$$

Аналогично, для второго уравнения:

$$e^{2X} \partial_- [e^{-2X} \partial_- e^{-2\phi}] = \frac{8\partial_- \partial_- \Lambda}{A(x^+ - x^-)}. \quad (2.34)$$

Второе уравнение переписывается как:

$$-\frac{8\partial_-\partial_-\Lambda(x^+,x^-)}{A(x^+-x^-)} = \frac{1}{2}(\partial_-f)^2. \quad (2.35)$$

Это позволяет нам проинтегрировать их:

$$\begin{cases} \partial_+\partial_+\Lambda(x^+,x^-) = -\frac{A}{16}(x^+-x^-)(\partial_+f)^2 \\ \partial_-\partial_-\Lambda(x^+,x^-) = -\frac{A}{16}(x^+-x^-)(\partial_-f)^2 \\ \partial_+\partial_-f = 0 \end{cases} \implies$$

$$\begin{aligned} \implies \Lambda = & -\frac{A}{16} \int_{x^{0+}}^{x^+} dx'^+ \int_{x^{0+}}^{x'^+} (\partial_+f)^2 (x''^+ - x^-) dx''^+ - \\ & -\frac{A}{16} \int_{x^{0-}}^{x^-} dx'^- \int_{x^{0-}}^{x'^-} (\partial_-f)^2 (x^+ - x''^-) dx''^- + H(x^+,x^-). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Здесь $H(x^+,x^-)$ является вакуумным решением (это становится очевидным при подстановке $f=0$ в решение). Далее будем находить H .

2.4. Вакуумные решения

Случай $f = 0$ соответствует вакуумному решению:

$$\begin{cases} \partial_+ \partial_+ H = 0, \\ \partial_- \partial_- H = 0, \\ \partial_+ \partial_- e^{-2\phi} - \frac{4}{A(x^+ - x^-)^2} \left[\frac{C}{2} - \frac{A}{2} e^{-2\phi} \right] = 0. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получаем, что

$$H = D_1(x^+) (x^- - x^{0-}) + D_2(x^+), \quad D_1''(x^+) (x^- - x^{0-}) + D_2''(x^+) = 0. \quad (2.37)$$

Вспоминаем, что $H \equiv \Lambda|_{f=0}$:

$$e^{-2\phi} = \frac{8H}{A(x^+ - x^-)^2} = \frac{8}{A(x^+ - x^-)^2} [D_1(x^+) (x^- - x^{0-}) + D_2(x^+)]. \quad (2.38)$$

и подставляем в третье уравнение системы:

$$C + D_1(x^+) - 4(x^+ - x^{0-}) D_1'(x^+) - 4D_2'(x^+) = 0. \quad (2.39)$$

Чтобы воспользоваться условием на вторые производные, полученным ранее, продифференцируем это равенство:

$$(x^+ - x^{0-}) D_1''(x^+) + D_2''(x^+) = 0. \quad (2.40)$$

Условия на вторые производные в 2.37 и 2.40 совместны тогда и только тогда, когда

$$D_1'' = D_2'' = 0 \quad \implies \quad \begin{cases} D_1(x^+) = C_1 x^+ + C_2 \\ D_2(x^+) = C_3 x^+ + C_4 \end{cases}, \quad \text{где } C_1, C_2, C_3, C_4 = \text{const}. \quad (2.41)$$

Тогда уравнение 2.39 превращается в условие на связь коэффициентов C_1, C_2, C_3, C_4 . Получаем:

$$C + C_2 + 4x^{0-} C_1 - 4C_3 = 0 \implies C_2 = \frac{4C_3 - 4x^{0-} C_1 - C}{4}. \quad (2.42)$$

Подставляя выражения для D_1 и D_2 с учетом связи констант в 2.37, и переобозначая постоянные, получаем выражение для вакуумного решения:

$$H = a + bx^+ + ex^- + dx^+x^-, \quad \text{где } b - e = \frac{C}{4}. \quad (2.43)$$

Таким образом, для этого решения:

$$ds^2 = -e^{2\phi} dx^+ dx^- = \frac{-8e^{2\phi} dx^+ dx^-}{A(x^+ - x^-)^2}, \quad (2.44)$$

$$e^{-2\phi} = \frac{8}{A} \left(\frac{a + bx^+ + ex^- + dx^+x^-}{x^+ - x^-} \right), \quad b - e = \frac{C}{4}. \quad (2.45)$$

В дальнейшем удобно будет использовать другую параметризацию решения:
Пусть $b = \bar{b} + \frac{C}{8}$, $e = \bar{b} - \frac{C}{8}$. Тогда $b - e = \frac{C}{4}$, как и требуется.
Решение записывается в виде:

$$ds^2 = \frac{-8e^{2\phi} dx^+ dx^-}{A(x^+ - x^-)^2}, \quad (2.46)$$

$$e^{-2\phi} = \frac{C}{A} \left(1 + \frac{a + \bar{b}(x^+ + x^-) + dx^+ x^-}{x^+ - x^-} \right). \quad (2.47)$$

Здесь a, \bar{b}, d – произвольные константы.

Произвольное вакуумное решение получается из (2.46), (2.47) конформными преобразованиями:

$$ds^2 = \frac{-8\partial_+ \omega^+(x^+) \partial_- \omega^-(x^-)}{A(\omega^+(x^+) - \omega^-(x^-))^2} e^{2\phi} dx^+ dx^-, \quad (2.48)$$

$$e^{-2\phi} = \frac{C}{A} \left(1 + \frac{a + \bar{b}(\omega^+(x^+) + \omega^-(x^-)) + d\omega^+(x^+)\omega^-(x^-)}{\omega^+(x^+) - \omega^-(x^-)} \right). \quad (2.49)$$

Здесь $\omega^+(x^+), \omega^-(x^-)$ – произвольные функции своих аргументов.

Важным обстоятельством является то, что остаточная калибровочная свобода позволяет делать нам преобразования $SL(2, R)$. При этих преобразованиях:

$$x^\pm = \frac{\alpha x'^\pm + \beta}{\gamma x'^\pm + \delta}; \quad \alpha\delta - \gamma\beta = 1. \quad (2.50)$$

$$dx^\pm = \frac{\alpha(\gamma x'^\pm + \delta) - (\alpha x'^\pm + \beta)\gamma}{(\gamma x'^\pm + \delta)^2} = \frac{dx'^\pm}{(\gamma x'^\pm + \delta)^2}, \quad (2.51)$$

$$x^+ - x^- = \frac{\alpha x'^+ + \beta}{\gamma x'^+ + \delta} - \frac{\alpha x'^- + \beta}{\gamma x'^- + \delta} = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(x'^+ - x'^-)}{(\gamma x'^+ + \delta)(\gamma x'^- + \delta)} = \frac{(x'^+ - x'^-)}{(\gamma x'^+ + \delta)(\gamma x'^- + \delta)}. \quad (2.52)$$

Тогда

$$\frac{dx^+ dx^-}{(x^+ - x^-)^2} = \frac{dx'^+ dx'^-}{(x'^+ - x'^-)^2}. \quad (2.53)$$

Аналогичными вычислениями можно показать, что в случае, когда все коэффициенты a, \bar{b}, d одновременно не зануляются, то выражение 2.47 для $e^{-2\phi}$ можно с помощью $SL(2, R)$ преобразований привести к виду

$$e^{-2\phi} = \frac{C}{A} \left(1 + \frac{1 - \mu x^+ x^-}{x^+ - x^-} \right), \quad (2.54)$$

где μ – новый параметр.

Если $a = \bar{b} = d = 0$, то получаем пространство AdS_2 в координатах Пуанкаре:

$$e^{-2\phi} = \frac{C}{A}, \quad (2.55)$$

$$ds^2 = \frac{-8dx^+ dx^-}{C(x^+ - x^-)^2} = \frac{8}{C} \left(\frac{-dt^2 + dz^2}{z^2} \right). \quad (2.56)$$

Согласно (2.53) пространство AdS_2 инвариантно относительно $SL(2, R)$ преобразований. Также отметим, что для решения в виде AdS_2 дилатон является константой, что крайне необычно для моделей дилатонной гравитации. Диаграмма Пенроуза для пространства AdS_2 изображена на Рис.1. Построение описано в приложении В.

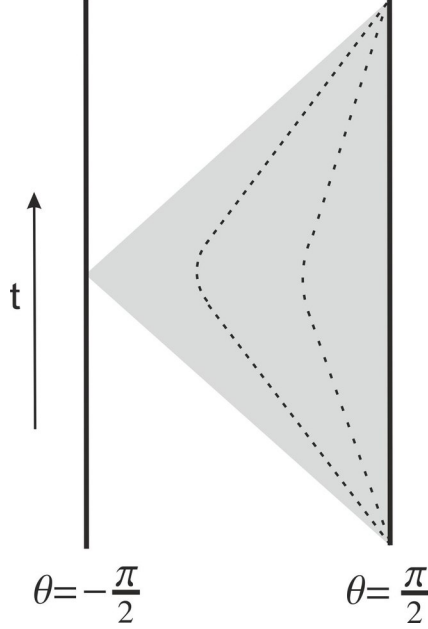


Рис. 1. Диаграмма Пенроуза для AdS_2 .

Если $a \neq 0$, $\bar{b} = d = 0$, то получаем пространство с нетривиальным масштабным фактором:

$$e^{-2\phi} = \frac{C}{A} \left(1 + \frac{a}{x^+ - x^-} \right) = \frac{C}{A} \left(1 + \frac{a}{z} \right), \quad (2.57)$$

$$ds^2 = \frac{-8}{C(x^+ - x^-)^2} \left(1 + \frac{a}{x^+ - x^-} \right)^{-1} dx^+ dx^- = \frac{8}{Cz^2} \left(1 + \frac{a}{z} \right)^{-1} (-dt^2 + dz^2), \quad (2.58)$$

где использованы переменные (t, z) из (2.8).

При $z \rightarrow 0$ имеем $e^{-2\phi} \rightarrow \infty$, то есть $z = 0$ - физическая сингулярность.

В этом пределе получаем, что $ds^2 \rightarrow \frac{8}{aC} \left(\frac{-dt^2 + dz^2}{z} \right)$.

При $z \rightarrow \infty$ видим, что $ds^2 \rightarrow \frac{8}{C} \left(\frac{-dt^2 + dz^2}{z^2} \right)$, то есть пространство асимптотически стремится к AdS_2 .

2.5. Коллапсирующий узкий волновой пакет

Остается непонятным, что из себя представляют остальные вакуумные решения. Для выяснения этого вопроса рассмотрим следующий процесс: с границы вакуумного решения (например, AdS_2) испускаем волновой пакет. Полученное решение при таком процессе должно описывать образование черной дыры в соответствующем пространстве.

Общее решение в модели:

$$ds^2 = -e^{2\rho} dx^+ dx^-, \quad (2.59)$$

$$e^{2\rho} = \frac{8e^{2\phi}}{A(x^+ - x^-)^2}, \quad (2.60)$$

$$e^{-2\phi} = -\frac{1}{2(x^+ - x^-)} \int_{x^{0+}}^{x^+} dx'^+ \int_{x^{0+}}^{x'^+} (\partial_+ f)^2 (x''^+ - x^-) dx''^+ - \\ - \frac{1}{2(x^+ - x^-)} \int_{x^{0-}}^{x^-} dx'^- \int_{x^{0-}}^{x'^-} (\partial_- f)^2 (x^+ - x''^-) dx''^- + \frac{C}{A} \left(1 + \frac{a + \bar{b}(x^+ + x^-) + dx^+x^-}{x^+ - x^-} \right). \quad (2.61)$$

Рассмотрим движение узкого волнового пакета по траектории $x^- = 0$, запущенного с границы $(x^+ = 0, x^- = 0)$ в вакуумном решении AdS_2 :

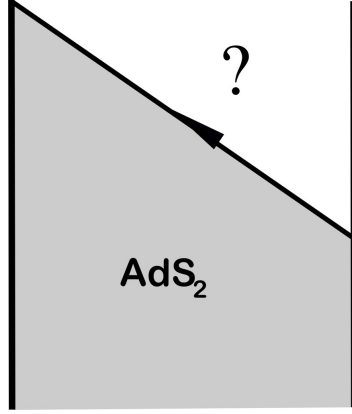


Рис. 2. Диаграмма Пенроуза для волнового пакета в AdS_2 .

$$a = \bar{b} = d = 0, \quad (\partial_- f)^2 = M\delta(x^-). \quad (2.62)$$

$$e^{-2\phi} = \frac{C}{A} + \frac{1}{2(x^+ - x^-)} \int_0^{x^-} dx'^- \int_0^{x'^-} M\delta(x''^-) (x''^- - x^+) dx''^- = \quad (2.63)$$

$$= \frac{C}{A} - \frac{1}{(x^+ - x^-)} \int_0^{x^-} Mx^+ \Theta(x^-) dx'^- = \frac{C}{A} - \frac{Mx^+x^- \Theta(x^-)}{(x^+ - x^-)}. \quad (2.64)$$

При $x^- < 0$ имеем $e^{-2\phi} = \frac{C}{A}$, то есть пространство AdS_2 .

При $x^- > 0$ имеем $e^{-2\phi} = \frac{C}{A} - \frac{Mx^+x^-}{(x^+ - x^-)}$. Это решение содержится среди решений (2.46, 2.47) при $a = \bar{b} = 0$, $d \neq 0$. С физической точки зрения данный процесс описывает образование черной дыры в результате коллапса волнового пакета. Это говорит нам о том, что решение (2.46, 2.47) при таких значениях констант описывает черные дыры в пространстве AdS_2 , а константа d определяет их массу.

Теперь рассмотрим движение волнового пакета в фоновом пространстве (2.57, 2.58):

$$a \neq 0, \quad \bar{b} = d = 0, \quad (\partial_- f)^2 = M\delta(x^-). \quad (2.65)$$

Аналогично, получаем:

$$e^{-2\phi} = \frac{C}{A} + \frac{a\frac{C}{A} - Mx^+x^- \Theta(x^-)}{x^+ - x^-}, \quad (2.66)$$

$$ds^2 = \frac{-8e^{2\phi} dx^+ dx^-}{A(x^+ - x^-)^2}. \quad (2.67)$$

Это решение (при $x^- > 0$) содержится среди решений (2.46, 2.47) при $a \neq 0$, $\bar{b} = 0$, $d \neq 0$. Опять же, это говорит нам о том, что решение (2.46, 2.47) при таких значениях констант описывает черные дыры в пространстве с нетривиальным масштабным фактором, а константа d определяет их массу.

Действительно, возьмем решение (2.66, 2.67) при $x^- > 0$ и преобразованиями из $SL(2, R)$ приведем его к виду:

$$e^{-2\phi} = \frac{C}{A} \left(1 + \frac{1 - \mu x^+ x^-}{x^+ - x^-} \right), \quad ds^2 = \frac{-8e^{2\phi} dx^+ dx^-}{A(x^+ - x^-)^2}. \quad (2.68)$$

Сделаем дополнительную замену координат:

$$x^\pm = \mu^{-1/2} \tanh(\mu^{1/2} x^\pm). \quad (2.69)$$

Тогда:

$$e^{-2\phi} = \frac{C}{A} \left[1 + \frac{1 - \tanh(\mu^{1/2} x'^+) \tanh(\mu^{1/2} x'^-)}{\mu^{-1/2} (\tanh(\mu^{1/2} x'^+) - \tanh(\mu^{1/2} x'^-))} \right] = \frac{C}{A} \left[1 + \mu^{1/2} \coth(\mu^{1/2} (x'^+ - x'^-)) \right], \quad (2.70)$$

$$\frac{dx^+ dx^-}{(x^+ - x^-)^2} = \frac{\mu}{\sinh^2(\mu^{1/2} (x'^+ - x'^-))}. \quad (2.71)$$

Метрика примет вид:

$$ds^2 = \frac{8\mu}{C} \cdot \frac{-dt^2 + dz^2}{\sinh^2(\mu^{1/2} z) (1 + \mu^{1/2} \coth(\mu^{1/2} z))}. \quad (2.72)$$

Обозначим

$$r = \mu^{1/2} \coth(\mu^{1/2} z) \quad \implies \quad \begin{cases} dz^2 = \frac{dr^2}{(r^2 - \mu)^2} \\ \sinh^2(\mu^{1/2} z) = \frac{\mu}{r^2 - \mu} \end{cases} \quad (2.73)$$

Тогда в этих координатах решение записывается как

$$e^{-2\phi} = 1 + r, \quad ds^2 = \frac{8}{C} \cdot \frac{1}{(1+r)} \left[-(r^2 - \mu) dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 - \mu} \right], \quad r \in (\mu^{1/2}; +\infty). \quad (2.74)$$

Будем называть эти координаты Шварцшильдовыми. В них мы получили статическую метрику с горизонтом, $r = \mu^{1/2}$ – радиус Шварцшильда.

Найдем температуру Хокинга для черной дыры (2.74): сделаем поворот Вика $\tau = it$. Метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{8}{C} \cdot \frac{1}{(1+r)} \left[(r^2 - \mu) d\tau^2 + \frac{dr^2}{r^2 - \mu} \right]. \quad (2.75)$$

Если имеется метрика вида $ds^2 = f(r) d\tau^2 + \frac{dr^2}{g(r)}$, где функции $f(r)$, $g(r)$ имеют нуль первого порядка в точке r_h (т.е. $f(r_h) = g(r_h) = 0$, но $f'(r_h) \neq 0$, $g'(r_h) \neq 0$), то температуру Хокинга можно посчитать следующим образом [8]:

$$T_H = \frac{\sqrt{f'(r_h)g'(r_h)}}{4\pi}. \quad (2.76)$$

В нашем случае

$$f = \frac{8}{C} \cdot \frac{r^2 - \mu}{1 + r}, \quad (2.77)$$

$$g = \frac{C}{8} \cdot (r^2 - \mu)(1 + r), \quad (2.78)$$

$$r_h = \sqrt{\mu}. \quad (2.79)$$

Имеем

$$f'(\sqrt{\mu}) = \frac{16\sqrt{\mu}}{C(1 + \sqrt{\mu})}, \quad (2.80)$$

$$g'(\sqrt{\mu}) = \frac{C\sqrt{\mu}(1 + \sqrt{\mu})}{4}. \quad (2.81)$$

Таким образом

$$T_H = \frac{2\sqrt{\mu}}{4\pi} = \frac{\sqrt{\mu}}{2\pi}. \quad (2.82)$$

3. Заключение

В данной работе получены следующие результаты:

1. Изучена модель дилатонной гравитации, предложенная в работе [7]. Установлена явная связь этой модели с моделью CGHS.
2. Получены вакуумные решения в данной модели: AdS_2 и пространство, асимптотически стремящееся к AdS_2 .
3. Получено общее классическое решение в модели.
4. Исследовано решение в виде узкого коллапсирующего волнового пакета. С помощью данного решения проведена идентификация вакуумных решений с черными дырами.
5. Найдена температура Хокинга для соответствующей черной дыры.

4. Приложение

4.1. Уравнения поля

Приведем вывод уравнений поля (2.4), (2.5), (2.6), (2.7). Имеем

$$A_D = \int d^2x \sqrt{-g} [e^{-2\phi} (R + 4(\nabla\phi)^2 + Ae^{-2\phi} - C)] , \quad (4.1)$$

$$A_M = -\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g} (\nabla f)^2 . \quad (4.2)$$

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} (g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) ,$$

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} ,$$

$$\delta(\nabla\phi)^2 = \delta(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi) = 4\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\delta g^{\mu\nu} + 8\nabla^\mu\phi\nabla_\mu\delta\phi .$$

$$\begin{aligned} \delta A_D = \int d^2x \sqrt{-g} & \left[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} e^{-2\phi} (R + 4(\nabla\phi)^2 + Ae^{-2\phi} - C) - 2\delta\phi e^{-2\phi} (R + 4(\nabla\phi)^2 + Ae^{-2\phi} - C) \right. \\ & \left. + e^{-2\phi} (R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + 4\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\delta g^{\mu\nu} + 8\nabla^\mu\phi\nabla_\mu\delta\phi - 2\delta\phi Ae^{-2\phi}) \right] . \quad (4.3) \end{aligned}$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} \delta A_D = \int d^2x \sqrt{-g} e^{-2\phi} & \left[(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\delta g^{\mu\nu} - 2(R + 4(\nabla\phi)^2 + Ae^{-2\phi} - C)\delta\phi - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(4(\nabla\phi)^2 - C + Ae^{-2\phi})\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + 4\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\delta g^{\mu\nu} + 8\nabla^\mu\phi\nabla_\mu\delta\phi - 2\delta\phi Ae^{-2\phi} \right] . \quad (4.4) \end{aligned}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = G_{\mu\nu} = 0 .$$

$$e^{-2\phi}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \delta g^{\mu\nu}(g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)e^{-2\phi} + \nabla_\lambda(\dots) , \text{ где}$$

$$\square e^{-2\phi} = \nabla_\mu(\nabla^\mu e^{-2\phi}) = 4e^{-2\phi}(\nabla\phi)^2 - 2e^{-2\phi}\square\phi ,$$

$$\nabla_\mu\nabla_\nu e^{-2\phi} = 4e^{-2\phi}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - 2e^{-2\phi}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi .$$

$$\text{Также } 8e^{-2\phi}\nabla^\mu\phi\nabla_\nu\delta\phi = 8\nabla_\mu(e^{-2\phi}\nabla^\mu\delta\phi) - 8e^{-2\phi}\square\phi\delta\phi + 16e^{-2\phi}(\nabla\phi)^2\delta\phi .$$

Собирая все вместе, за исключением поверхностных слагаемых $\nabla_\rho(\dots)$, получаем:

$$\begin{aligned} \delta A_D = \int d^2x \sqrt{-g} e^{-2\phi} [-2(R - 4(\nabla\phi)^2 - C + 2Ae^{-2\phi} + 4\Box\phi) \delta\phi + \\ + \left(2g_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2 - 2g_{\mu\nu}\Box\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}C - \frac{A}{2}g_{\mu\nu}e^{-2\phi} + 2\nabla_\mu\nabla_\nu\phi \right) \delta g^{\mu\nu}] . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Теперь возьмем вариацию действия для скалярного поля материи:

$$A_M = -\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \nabla_\mu f \nabla_\nu f) . \quad (4.6)$$

$$\delta(\nabla f)^2 = \nabla_\mu f \nabla_\nu f \delta g^{\mu\nu} + 2g^{\mu\nu} \nabla_\mu f \nabla_\nu \delta f = \nabla_\mu f \nabla_\nu f \delta g^{\mu\nu} + 2\nabla_\mu(\nabla^\mu f \delta f) - 2\Box f \delta f . \quad (4.7)$$

Не учитывая поверхностный член, получаем:

$$\begin{aligned} \delta A_M = -\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g} [-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla f)^2 \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\mu f \nabla_\nu f \delta g^{\mu\nu}] - 2\Box f \delta f = \\ = -\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g} [(\nabla_\mu f \nabla_\nu f - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla f)^2) \delta g^{\mu\nu} - 2\Box f \delta f] . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Приравнивая вариацию полного действия к нулю

$$\delta A_D + \delta A_M = 0 . \quad (4.9)$$

получаем уравнения поля и выражение для тензора энергии-импульса, приведенные в параграфе (2.1).

Чтобы записать их в конформной калибровке, понадобятся отличные от нуля символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{++}^+ = 2\partial_+\rho , \quad \Gamma_{--}^- = 2\partial_-\rho . \quad (4.10)$$

Скаляр Риччи:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{+-} R_{+-} + g^{-+} R_{-+} = 8e^{-2\rho} \partial_+ \partial_-\rho . \quad (4.11)$$

Итак, в конформной калибровке

$$\nabla_+ \nabla_+ \phi = \partial_+^2 \phi - 2\partial_+ \rho \partial_+ \phi , \quad \nabla_- \nabla_- \phi = \partial_-^2 \phi - 2\partial_- \rho \partial_- \phi , \quad \nabla_+ \nabla_- \phi = \partial_+ \partial_- \phi , \quad (4.12)$$

$$(\nabla\phi)^2 = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi = -4e^{-2\rho} \partial_+ \phi \partial_- \phi , \quad \Box\phi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi = -4e^{-2\rho} \partial_+ \partial_- \phi , \quad (4.13)$$

$$T_{++} = (\partial_+ f)^2 , \quad T_{--} = (\partial_- f)^2 , \quad T_{+-} = 0 . \quad (4.14)$$

Используя это, уравнения поля переписываются, как в пункте (2.2).

4.2. Пространство AdS_2

Пространство AdS_2 определяется как гиперboloид (радиус кривизны l для простоты положим равным 1)

$$X_0^2 + X_2^2 - X_1^2 = 1, \quad (4.15)$$

вложенный в пространство с метрикой

$$ds^2 = -(dX_0^2 + dX_2^2) + dX_1^2. \quad (4.16)$$

Можно выбрать следующую параметризацию гиперboloида:

$$X_0 = \cosh \rho \cos \tau,$$

$$X_2 = \cosh \rho \sin \tau,$$

$$X_1 = \sinh \rho.$$

Метрика примет вид

$$ds^2 = -\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2, \quad \text{где } \tau \in [0; 2\pi], \quad \rho \in (-\infty; +\infty). \quad (4.17)$$

Такие координаты называются глобальными. Можно привести метрику (4.17) к еще одному часто используемому виду. Для этого сделаем следующие замены:

$$r = \sinh \rho,$$

$$t = \tau.$$

То есть

$$X_0 = \sqrt{1 + r^2} \cos t,$$

$$X_1 = r,$$

$$X_2 = \sqrt{1 + r^2} \sin t.$$

Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = -(r^2 + 1)dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 + 1}. \quad (4.18)$$

Также для пространства AdS_2 можно ввести координаты Пуанкаре, покрывающие половину гиперboloида:

$$t' = \frac{X_0}{X_1 + X_2},$$

$$z = \frac{1}{X_1 + X_2}.$$

В них

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} \left(-dt'^2 + dz^2 \right). \quad (4.19)$$

Переход от глобальных координат к координатам Пуанкаре задается формулами

$$r = \frac{1 + t'^2 - z^2}{2z},$$

$$\sin t = \frac{-1 + t'^2 - z^2}{\sqrt{1 + 2t'^2 + t'^4 + 2z^2 - 2t'^2 z^2 + z^4}} .$$

Диаграмма Пенроуза для AdS_2 строится следующим образом. Возьмем метрику (4.17) и сделаем замену координат

$$d\theta = \frac{d\rho}{\cosh \rho} . \quad (4.20)$$

Тогда

$$\begin{aligned} d\rho^2 &= d\theta^2 \cosh^2 \rho , \\ \tan \theta/2 = \tanh \rho/2 &= \frac{1 - e^{-\rho}}{1 + e^{-\rho}} \implies e^\rho = \tan(\theta/2 + \pi/4) , \\ \cosh \rho &= \frac{e^\rho + e^{-\rho}}{2} = \frac{1}{\cos \theta} . \end{aligned}$$

Метрика записывается в виде

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} [-dt^2 + d\theta^2] , \quad \text{где } \theta \in [-\pi/2; \pi/2] . \quad (4.21)$$

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{соответствует границам пространства } AdS_2 . \quad (4.22)$$

По метрике (4.21) строится диаграмма Пенроуза, представленная на рисунке 1 в параграфе (2.4). Координаты Пуанкаре на этой диаграмме покрывают выделенную треугольную область.

В заключение рассмотрим черную дыру в пространстве AdS_2 и построим для нее диаграмму Пенроуза.

$$ds^2 = -(r'^2 - 2\mu r' + 1)dt^2 + \frac{dr'^2}{r'^2 - 2\mu r' + 1} = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} , \quad \text{где } f(r) = r^2 - M . \quad (4.23)$$

Введем координату r^* так, что $\frac{dr^*}{dr} = \frac{1}{f}$. Решая явно, находим, что

$$r^* = \frac{1}{2\sqrt{M}} \ln \frac{|r - \sqrt{M}|}{r + \sqrt{M}} . \quad (4.24)$$

Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = f(-dt^2 + dr^{*2}) . \quad (4.25)$$

Запишем метрику в координатах светового конуса

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= t - r^* , \\ \tilde{v} &= t + r^* . \end{aligned}$$

То есть

$$ds^2 = -f d\tilde{u} d\tilde{v} , \quad \text{где } f = f(\tilde{u}, \tilde{v}) . \quad (4.26)$$

Выражение для $f(\tilde{u}, \tilde{v})$ найдем из следующего соотношения:

$$r^* = \frac{1}{2\sqrt{M}} \ln \frac{r - \sqrt{M}}{r + \sqrt{M}} = \frac{\tilde{v} - \tilde{u}}{2} . \quad (4.27)$$

Тогда

$$f = (r + \sqrt{M})e^{\sqrt{M}(\tilde{v}-\tilde{u})}, \quad (4.28)$$

$$ds^2 = -(r + \sqrt{M})^2 e^{\sqrt{M}(\tilde{v}-\tilde{u})} d\tilde{u}d\tilde{v}. \quad (4.29)$$

Наконец вводим координаты

$$u = -e^{-\sqrt{M}\tilde{u}}, \quad (4.30)$$

$$v = e^{-\sqrt{M}\tilde{v}}. \quad (4.31)$$

Метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{-4}{(1+uv)^2} dudv, \quad \text{где} \quad -\infty < u < 0, \quad 0 < v < \infty, \quad (4.32)$$

$$uv = -\frac{r - \sqrt{M}}{r + \sqrt{M}}. \quad (4.33)$$

В этих координатах метрика более не сингулярна в точке $r = \sqrt{M}$, т.е. когда $uv = 0$, а значит мы можем продолжить ее до $-\infty < u < \infty$, $-\infty < v < \infty$. При этом бесконечности по r соответствуют $uv = -1$. Чтобы построить диаграмму Пенроуза, введем

$$u = \tan\left(\frac{\lambda - \rho}{2}\right), \quad (4.34)$$

$$v = \tan\left(\frac{\lambda + \rho}{2}\right). \quad (4.35)$$

Тогда

$$uv = \frac{\tan^2 \lambda/2 - \tan^2 \rho/2}{1 - \tan^2 \lambda/2 \tan^2 \rho/2} = -\frac{r - \sqrt{M}}{r + \sqrt{M}}, \quad (4.36)$$

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 \rho} [-d\lambda^2 + d\rho^2]. \quad (4.37)$$

Отсюда видим, что на диаграмме Пенроуза бесконечность по r переходит в $\rho = \pm\pi/2$, горизонт $r = \pm\sqrt{M}$ в $\lambda = \pm\rho$, а сингулярность в $\lambda = \pm\pi/2$. Получаем следующую диаграмму:

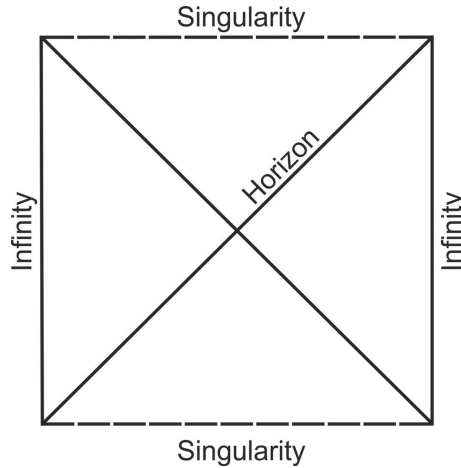


Рис. 3. Диаграмма Пенроуза для черной дыры в AdS_2 .

Литература

- [1] J. Maldacena, "The Large N Limit of Superconformal field theories and supergravity," (1998) arXiv:hep-th/9711200
- [2] S.S. Gubser, I.R. Klebanov, A.M. Polyakov, "Gauge Theory Correlators from Non-Critical String Theory," (1998) arXiv:hep-th/9802109
- [3] E. Witten, "Anti De Sitter Space And Holography," (1998) arXiv:hep-th/9802150
- [4] J. M. Maldacena, "Eternal Black Holes in AdS," (2001) arXiv:hep-th/0106112
- [5] C. G. Callan, Jr., S. B. Giddings, J. A. Harvey and A. Strominger, "Evanescent black holes," (1992) arXiv:hep-th/9111056
- [6] A. Strominger, "Les Houches Lectures on Black Holes," (1995) arXiv:hep-th/9501071
- [7] A. Almheiri, J. Polchinski, "Models of AdS2 Backreaction and Holography," (2014) arXiv:hep-th/1402.6334
- [8] M. Ammon, J. Erdmenger, "Gauge/Gravity duality: Foundations and Applications", Cambridge University Press, 2015.