# «Конформная теория поля»
## Задачи к экзамену
(весна 2015 г.)

1. **Голографическая КХД**
Рассмотрим квантовую хромодинамику с $N$ безмассовыми кварками. Эта теория обладает глобальной симметрией $SU(N)_L \times SU(N)_R \times U(1)_B$ и соответствующими сохраняющимися токами $J^L_\mu(x)$, $J^R_\mu(x)$ и $J^B_\mu(x)$. Для простоты будем игнорировать абелеву часть теории, т.е. группу $U(1)_B$ и ток $J^B_\mu$. Введем пятимерные калибровочные $su(N)$ поля $L_A(x,z)$ и $R_A(x,z)$, дуальные к $J^L_\mu(x)$ и $J^R_\mu(x)$. Действие дуальной модели в пространстве $\mathrm{AdS}_5$ запишем в виде
$$S_5 = \frac{1}{2g_5^2}\int d^5x\sqrt{|g|}\, g^{AC}g^{BD}\,\mathrm{tr}\left(L_{AB}L_{CD} + R_{AB}R_{CD}\right) , \tag{1}$$
где $L_{AB} = \partial_A L_B - \partial_B L_A + [L_A,\, L_B]$ и $R_{AB}$ — напряженности соответствующих калибровочных полей. Так как КХД не является конформной теорией, обрежем пространство $\mathrm{AdS}_5$, $\epsilon < z < L$, нарушив его симметрии. Граничное условие при $z = L$ выберем в виде
$$L_\mu = R_\mu\ , \qquad \partial_5 L_\mu = -\partial_5 R_\mu\ , \qquad L_5 = -R_5\ , \qquad \partial_5 L_5 = \partial_5 R_5\ , \qquad z = L\ .$$
Границы $z = L$ и $z = \epsilon \ll L$ будем называть «инфракрасной» и «ультрафиолетовой», соответственно.

   (a) Пользуясь основной формулой голографического соответствия, найти двухточечную функцию токов КХД $\langle J^L_\mu(x) J^R_\nu(x')\rangle$. Рассмотреть пределы низких и высоких энергий.

   (b) Рассмотрим модель без источников: $L_{AB} = R_{AB} = 0$ при $x = \epsilon$. Какими глобальными симметриями она обладает? Найти общее решение классических уравнений движения при низких энергиях, т.е. при $\partial_x \ll L^{-1}$. Подставив это решение в (1), получить низкоэнергетическое эффективное действие теории. Что описывает это действие? Какие поля в нем присутствуют?

   (c) Вычислить низкоэнергетическое эффективное действие с фиксированными значениями полей на границе,
$$L_\mu(x,0) = \bar{L}_\mu(x)\ , \qquad\qquad R_\mu(x,0) = \bar{R}_\mu(x)\ . \tag{2}$$
   Получить производящий функционал для функций Грина токов КХД.

2. **Вырожденные конформные семейства**
Рассмотрим представление алгебры Вирасоро с центральным зарядом $c$, основанное на примарном векторе $|\phi_\Delta\rangle$ размерности $\Delta$. *Нулевым вектором* называется такое состояние $|\chi\rangle$ этого представления, которое само является примарным, т.е.
$$L_n|\chi\rangle = 0\ , \quad n > 0\ , \qquad\qquad L_0|\chi\rangle = (\Delta + N)|\chi\rangle\ ,$$
где $N$ — уровень вектора $|\chi\rangle$.

(a) Найти значения $\Delta$, при которых в представлении есть нулевой вектор на уровне $N = 1$. То же для $N = 2$ и 3.

(b) Сравнить ответ с формулой Каца:

$$\Delta \equiv \Delta_{(n,\,m)} = \frac{c-1}{24} + \frac{1}{4}(n\alpha_+ + m\alpha_-)^2 \,, \qquad \alpha_\pm = \frac{\sqrt{1-c} \pm \sqrt{25-c}}{\sqrt{24}} \,,$$

где $n$, $m$ — целые положительные числа, такие, что $N = nm$. Соответствующие примарные поля будем обозначать $\phi_{(n,\,m)} \equiv \phi_\Delta$.

(c) Показать, что нулевые вектора и их потомки ортогональны всем векторам представления, в том числе самим себе. Таким образом, их можно самосогласованно положить равными нулю. Полученные в результате такой редукции представления алгебры Вирасоро и примарный вектор $|\phi_\Delta\rangle \equiv |\phi_{(n,\,m)}\rangle$ называются *вырожденными.*

(d) Из условия равенства нулю векторов, найденных в п. 2a, получить дифференциальные уравнения для корреляторов

$$\langle\, \phi_\Delta(z)\; \phi_{\Delta_1}(z_1) \ldots \phi_{\Delta_n}(z_n) \,\rangle$$

вырожденных полей с другими примарными полями при $N = 1,\, 2,\, 3$.

(e) Проверить на простых примерах, что операторное произведение вырожденных полей содержит только вырожденные поля. А именно, показать, что

$$\phi_{(1,\,2)} \times \phi_{(n,m)} = [\phi_{(n,\,m-1)}] + [\phi_{(n,\,m+1)}] \,, \tag{3}$$

$$\phi_{(2,\,1)} \times \phi_{(n,\,m)} = [\phi_{(n-1,\,m)}] + [\phi_{(n+1,\,m)}] \,, \tag{4}$$

где $[\phi_{(n,\,m)}]$ обозначает линейную комбинацию полей семейства $(n,\, m)$.
*Указание.* Записать и решить уравнение для трехточки вырожденного поля с двумя другими полями.

(f) Доказать, что операторное разложение $\phi_{(1,\,2)} \times \phi_{(2,\,1)}$ и эквивалентное ему $\phi_{(2,\,1)} \times \phi_{(1,\,2)}$ содержат только вырожденные поля с $(n > 0,\, m > 0)$. Это утверждение верно для всех вырожденных полей с положительными $(n,\, m)$, которые образуют замкнутую алгебру.

3. **Возникающая релятивистская инвариантность**
Пусть в некоторой теории на масштабе импульсов $\Lambda$ присутствует лоренц–нарушающее поле $\bar\phi$,

$$S_0 = \frac{1}{2}\int d^4x\ \left[(\partial_t\bar\phi)^2 - v^2(\partial_i\bar\phi)^2 - \mu_{UV}^2\bar\phi^2\right] \,, \tag{5}$$

где $v \neq 1$ — скорость $\bar\phi$. Пусть далее это поле взаимодействует с некоторым оператором $\mathcal{O}$ сильносвязанной конформной теории,

$$S_{int} = g\Lambda^{3-\Delta_\mathcal{O}} \int d^4x\, \bar\phi\, \mathcal{O} \,, \tag{6}$$

где мы ввели безразмерную константу связи $g$ и положили конформную и каноническую размерности $\mathcal{O}$ равными $\Delta_{\mathcal{O}}$. Видно, что при $\Delta_{\mathcal{O}} < 3$ взаимодействие (6) релевантно в инфракрасии, в обратном случае — иррелевантно.

(a) Построить AdS/CFT модель для вычисления корреляционных функций операторов $\mathcal{O}$. *Примечание.* Для теории, обрезанной на масштабе $\Lambda$, следует положить $z > l_{AdS} \equiv \Lambda^{-1}$.

(b) С помощью этой модели вычислить двухточечную корреляционную функцию $\mathcal{O}$ в импульсном представлении.

(c) Найти пропагатор поля $\bar{\phi}$ в изначальной теории (5), (6).

(d) Получить инфракрасный предел этого пропагатора в случаях $\Delta_{\mathcal{O}} > 3$ и $\Delta_{\mathcal{O}} < 3$. Восстанавливается ли симметрия Лоренца при низких энергиях?

4. **Теорема Замолодчикова**

Рассмотрим двумерную квантовую теорию (не обязательно конформную), обладающую инвариантностью относительно евклидовых трансляций и вращений. В такой теории присутствует симметричный тензор энергии–импульса $T_{\mu\nu}(x) = T_{\nu\mu}(x)$. Рассмотрим корреляторы компонент этого тензора

$$D = z^4 \langle T_{zz}(x)\, T_{zz}(0,\,0)\rangle\ , \quad E = z^3 \bar{z} \langle T_{zz}(x)\, T_{z\bar{z}}(0,\,0)\rangle\ , \quad F = z^2 \bar{z}^2 \langle T_{z\bar{z}}(x)\, T_{z\bar{z}}(0,\,0)\rangle$$

в комплексных координатах $x^\mu \equiv (z,\, \bar{z})$.

(a) Доказать, что $D$, $E$ и $F$ — функции $x^2 \equiv z\bar{z}$.

(b) Используя сохранение $T_{\mu\nu}$, доказать неравенство:

$$\frac{dC}{dx^2} \equiv \frac{d}{dx^2}\,(2D - 4E - 6F) \le 0\ . \tag{7}$$

*Указание.* Использовать условие положительности $\langle T_{z\bar{z}}(x)\, T_{z\bar{z}}(0)\rangle \ge 0$ в евклидовой унитарной теории.

(c) Пусть ренормализационная группа теории имеет инфракрасную и ультрафиолетовую фиксированные точки. Используя полученный выше результат, продемонстрировать, что в этих точках теория является конформной, а ультрафиолетовый и инфракрасный центральные заряды удовлетворяют неравенству $c_{UV} > c_{IR}$.

(d) Теперь рассмотрим двумерную теорию, обладающую дилатационной инвариантностью. Предполагая канонические коммутациоонные соотношения между оператором дилатации и тензором энергии–импульса и используя неравенство (7), доказать, что теория — конформная.

5. **Минимальные модели**

   (a) Решить подзадачи 2a—2c.

   (b) *Минимальной моделью* будем называть конформную теорию, включающую в себя только вырожденные конформные семейства и обладающую таким центральным зарядом, что
   $$\frac{\alpha_-}{\alpha_+} = -\frac{p}{q} \, ,$$
   где $p$ и $q$ — взаимно–простые положительные целые числа. Определить размерности всех примарных полей и центральный заряд модели.

   (c) Показать, что модель содержит только конформные семейства с
   $$1 \leq n < p \, , \qquad\qquad 1 \leq m < q \, .$$
   Таким образом, количество примарных полей в минимальной модели ограничено.

   (d) Наложим на модель дополнительное условие $\phi_{(p-n,\, q-m)} = \phi_{(p,q)}$. Показать, что это условие самосогласовано, т.е. конформные размерности соответствующих полей равны.

   (e) При каких значениях $p$ и $q$ модель может быть унитарна?

   (f) Рассмотреть явно случаи $(p,q) = (3,4)$ (модель Изинга в критической точке) и $(4,5)$ (трикритическая модель Изинга). Найти центральные заряды, размерности всех полей и правила слияния.

6. **Квазиклассическая теория Лиувилля**
   Рассмотрим двумерное скалярное поле с евклидовым действием
   $$S_0 = \frac{1}{8\pi}\int d^2x\sqrt{g}\left(\frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + QR\phi\right) \, .$$
   Здесь $R$ — скаляр кривизны, $Q$ — число. Далее будем полагать, что модель определена на римановой сфере с $R=0$, покрытой плоскими координатами $z$ и $\bar{z}$.

   (a) Найти эйнштейновский тензор энергии импульса. Показать, что теория конформная.

   (b) Вычислить центральный заряд. Продемонстрировать, что $V_\alpha =: \mathrm{e}^{\alpha\phi}:$ являются примарными полями. Получить их конформные размерности.

   (c) Добавим взаимодействие
   $$S_{int} = \mu^2 \int d^2x : \mathrm{e}^{b\phi} : \, .$$
   При каком $b$ это взаимодействие не нарушает конформную инвариантность на квантовом уровне? Далее будем вычислять корреляторы во взаимдействующем случае по теории возмущений, полагая
   $$\mathrm{e}^{-S_{int}} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n!}(S_{int})^n \, .$$

Таким образом, учет взаимодействий происходит за счет вставок произвольного количества операторов $V_b$ в функции Грина.

(d) Показать, что $\Phi_{(1,2)} = V_{-b/2}$ является вырожденным полем второго порядка, т.е. один и его потомков второго уровня равен нулю.
*Указание.* Достаточно продемонстрировать, что вектор состояния $|\chi\rangle$, соответствующий этому потомку, ортогонален всем состояниям, в том числе самому себе.

(e) Используя условие равенства нулю потомка, получить дифференциальное уравнение на корреляторы поля $\Phi_{(1,2)}$,

$$\mathcal{G} = \langle \Phi_{(1,2)}(z) V_{\alpha_1}(z_1) \dots V_{\alpha_n}(z_n) \rangle \ . \tag{8}$$

Как изменяется это уравнение после учета взаимодействия?

(f) Далее будем рассматривать предел слабой связи $b \to 0$. Пусть поля, входящие в (8), обладают параметрически большими значениями $\alpha_i = -s_i/b$, где $s_i$ — числа порядка единицы. Рассматривая функциональный интеграл для коррелятора (8), показать, что

$$\mathcal{G} = \psi(z,\, z_1, \dots\, , z_n)\, \mathrm{e}^{-I(z_1,\dots,z_n)/b^2} \ , \tag{9}$$

где $\psi$ и $I$ не зависят от $b$. Найти $I$ при $n = 2$ и $n = 3$, считая $s_i = 1$.

(g) Используя представление (9), получить дифференцильное уравнение на $\psi$. Решить это уравнение при $n = 2$ и $n = 3$, приняв $s_i = 1$.
*Указание.* Искать решение в виде рациональной функции.