

# CFT-3 (весна 2014)

## Формулы, $D = 2$

1. Преобразование ТЭИ:

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon T &= -2T\partial\epsilon - \epsilon\partial T - c\partial^3\epsilon/12 \\ T'(w) &= \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-2} \left(T(z) - \frac{c}{12}\{w; z\}\right) \\ &= \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-2} T(z) + \frac{c}{12}\{z; w\} \\ \{w; z\} &= \frac{d^3w/dz^3}{dw/dz} - \frac{3}{2} \left(\frac{d^2w/dz^2}{dw/dz}\right)^2\end{aligned}$$

2. Гильбертово пространство:

$$\begin{aligned}z &= e^{\tau+2\pi i\sigma/L}, \quad \bar{z} = e^{\tau-2\pi i\sigma/L} \\ |\varphi_{in}\rangle &= \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \varphi(z, \bar{z})|0\rangle \\ z^\dagger &= 1/\bar{z} \\ [\varphi(z, \bar{z})]^\dagger &= \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \varphi(1/\bar{z}, 1/z) \\ \langle\varphi_{out}| &= \lim_{z, \bar{z} \rightarrow \infty} \langle 0| [\varphi(z, \bar{z})]^\dagger \\ \langle\varphi_{out}|\varphi_{in}\rangle &= C_\varphi\end{aligned}$$

3. Операторный формализм:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} \varphi_1(z)\varphi_2(w) &= \varphi_1(z)\varphi_2(w)\theta(|z| - |w|) \\ &\quad + \varphi_2(w)\varphi_1(z)\theta(|w| - |z|) \\ Q_i &= \oint dz j_i(z) \\ [Q_1, b(w)] &= \mathcal{R} \oint_w dz j(z)b(w)\end{aligned}$$

4. Конформные преобразования:

$$\begin{aligned}[Q_1, Q_2] &= \mathcal{R} \oint dw \oint_w dz j_1(z)j_2(w) \\ Q &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \epsilon(z)T(z) \\ \delta_\epsilon\varphi &= -[Q, \varphi]\end{aligned}$$

5. ОРЕ для ТЭИ:

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w}$$

6. Разложение по модам:

$$\begin{aligned}\varphi(z, \bar{z}) &= \sum_{mn} z^{-m-h} \bar{z}^{-n-\bar{h}} \varphi_{mn} \\ \varphi_{mn} &= \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+h-1} \oint \frac{d\bar{z}}{(-2\pi i)} \bar{z}^{n+\bar{h}-1} \varphi(z, \bar{z}) \\ \varphi_{m,n}^\dagger &= \varphi_{-n,-m} \\ \varphi_{mn}|0\rangle &= 0, \quad m > -h, \quad n > -\bar{h}\end{aligned}$$

7. Алгебра Вирасоро:

$$\begin{aligned}T(z) &= \sum_m z^{-m-2} L_m \\ \bar{T}(\bar{z}) &= \sum_n \bar{z}^{-n-2} \bar{L}_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_m &= \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} T(z) \\ [L_m, L_{m'}] &= \frac{c(m^3-m)}{12} \delta_{m+m'} + L_{m+m'}(m-m')\end{aligned}$$

8. «Примарные» состояния:

$$\begin{aligned}|h, \bar{h}\rangle &= \varphi_{h\bar{h}}(0, 0)|0\rangle \\ L_0|h, \bar{h}\rangle &= h|h, \bar{h}\rangle, \quad \bar{L}_0|h, \bar{h}\rangle = \bar{h}|h, \bar{h}\rangle \\ L_{-n}|h, \bar{h}\rangle &= |h+n, \bar{h}\rangle\end{aligned}$$

9. Модуль Верма:

$$\begin{aligned}L_n|h\rangle &= 0, \quad n \geq 1 \\ |h, 5\rangle &= L_{-2}L_{-3}|h\rangle\end{aligned}$$

10. Вертекс скалярного поля:

$$\begin{aligned}V_k &=: e^{ik\varphi} : \quad h = \bar{h} = \frac{k^2}{8\pi g} \\ V_k V_q &= \delta_{k+q} |z-w|^{-k^2/2\pi g} + \dots\end{aligned}$$

11. Нормальное упорядочивание:

$$\begin{aligned}(AB)(w) &= \lim_{z \rightarrow 0} \text{Reg} [A(z)B(w)] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_w \frac{dz}{z-w} A(z)B(w) \\ (AB) &\neq (BA)\end{aligned}$$

12. Поля-потомки:

$$\begin{aligned}T(z) &= \sum_m (z-w)^{-m-2} L_m(w) \\ \varphi^{(-n)} &= (L_{-n}\varphi)(w) \\ \langle\varphi^{(-n)}(w) X\rangle &= \mathcal{L}_{-n}\langle\varphi(w) X\rangle \\ \mathcal{L}_{-n} &= \sum_i \left[ \frac{h_i(n-1)}{(z_i-w)^n} - \frac{\partial_i}{(z_i-w)^{n-1}} \right]\end{aligned}$$

13. Необходимые условия унитарности:

$$c \geq 0 \quad \& \quad h, \bar{h} \geq 0.$$

# Задачи

1. Вычислить двухточку  $\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle$  двумерного массивного скалярного поля  $\varphi(x)$  на окружности. Показать, что она расходится в пределе  $x^\mu \rightarrow y^\mu$ .
2. Доказать свойство производной Шварца:

$$\{u; z\} = \{w; z\} + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 \{u; w\}.$$

3. Доказать групповое свойство преобразования ТЭИ: комбинация преобразований  $z \rightarrow w(z) \rightarrow u(w(z))$  приводит к тому же результату, что и прямое преобразование  $z \rightarrow u(w(z))$ .
4. Показать, что производная Шварца от глобального конформного преобразования равна нулю.
5. Вычислить вакуумное среднее ТЭИ конформной теории на двумерном конусе с углом раствора  $\alpha$ .
6. Показать, что генератор конформных преобразований 4 представим в виде  $Q = \sum_m \epsilon_m L_m$ , где  $\epsilon(z) = \sum_m z^{m+1} \epsilon_m$ .
7. Проверить формулу обратного преобразования 6.
8. Вычислить  $[\bar{L}_n, \bar{L}_{n'}]$ .
9. Показать, что  $L_{-1}, L_0, L_1$  соответствуют сдвигам, дилатациям и специальным конформным преобразованиям.
10. Вывести коммутационное соотношение

$$[L_m, \varphi_{m'}] = (m(h-1) - m') \varphi_{m+m'}.$$

11. Вычислить вес  $\bar{h}$  оператора  $V_k$ .
12. Вычислить ОРЕ  $T(z)V_k(w, \bar{w})$ .
13. Пусть  $A$  и  $B$  — линейные комбинации операторов рождения–уничтожения  $a_n, \bar{a}_n$ . Доказать соотношение

$$: e^A :: e^B : = : e^{A+B} : e^{\langle AB \rangle}, \quad (1)$$

где  $\langle AB \rangle$  — вакуумное ожидание произведения операторов.

14. Используя формулу (1), получить ОРЕ  $V_k(z, \bar{z})V_q(w, \bar{w})$ .
15. Вычислить конформную размерность состояния  $a_{-m_1} a_{-m_2} |0\rangle$ .
16. Вычислить  $\langle \varphi^{(-2)}(w) \partial \varphi(z) \rangle$ .