

CFT-2
(весна 2015)

Формулы, $D = 2$

1. Координаты:

$$z = x^1 + ix^2$$

$$\bar{z} = x^1 - ix^2$$

$$\partial \equiv \partial_z = (\partial_1 - i\partial_2)/2$$

$$\bar{\partial} \equiv \partial_{\bar{z}} = (\partial_1 + i\partial_2)/2$$

$$\int dzd\bar{z} \equiv 2 \int dx^1 dx^2$$

$$\text{Евклид: } z^* = \bar{z}$$

$$\text{Минковский: } z^* = z, \bar{z}^* = \bar{z}$$

2. Глобальная группа $SL(2, \mathbb{C})$:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1$$

$$A_w = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det A_w = 1$$

3. Скалярное поле:

$$z' = z + \epsilon(z), \quad \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\epsilon}$$

$$\delta_\epsilon \varphi = \varphi'(z, \bar{z}) - \varphi(z, \bar{z})$$

$$= -\epsilon \partial \varphi - \bar{\epsilon} \bar{\partial} \varphi$$

4. Алгебра Витта:

$$\epsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \epsilon_n z^{n+1}$$

$$\delta_\epsilon \varphi = \sum (\epsilon_n l_n + \bar{\epsilon}_n \bar{l}_n) \varphi$$

$$l_n = -z^{n+1} \partial$$

$$\bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1} \bar{\partial}$$

$$[l_n, l_m] = (n - m) l_{n+m}$$

$$[\bar{l}_n, \bar{l}_m] = (n - m) \bar{l}_{n+m}$$

5. Примарные поля:

$$\varphi'(z', \bar{z}') = \left(\frac{dz'}{dz}\right)^{-h} \left(\frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}}\right)^{-\bar{h}} \varphi(z, \bar{z})$$

$$h = (\Delta + s)/2, \quad \bar{h} = (\Delta - s)/2$$

$$\delta_\epsilon \varphi = -(h\partial\epsilon + \epsilon\partial)\varphi - (\bar{h}\bar{\partial}\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}\bar{\partial})\varphi$$

6. Корреляторы: $z_{ij} \equiv z_i - z_j$

$$\langle \varphi_1(w_1, \bar{w}_1) \dots \varphi_n(w_n, \bar{w}_n) \rangle = \prod_i \left(\frac{dw_i}{dz_i}\right)^{-h_i}$$

$$\times \left(\frac{d\bar{w}_i}{d\bar{z}_i}\right)^{-\bar{h}_i} \langle \varphi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \varphi_n(w_n, \bar{w}_n) \rangle$$

$$\langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle = \frac{C_{12}}{z_{12}^{2h_1} \bar{z}_{12}^{2\bar{h}_1}} \cdot \delta_{h_1 h_2} \delta_{\bar{h}_1 \bar{h}_2},$$

$$\langle \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \rangle = \frac{C_{123}}{z_{12}^{h_{12}} z_{23}^{h_{23}} z_{13}^{h_{13}} \bar{z}_{12}^{\bar{h}_{12}} \bar{z}_{23}^{\bar{h}_{23}} \bar{z}_{13}^{\bar{h}_{13}}},$$

$$h_{12} = h_1 + h_2 - h_3.$$

$$\text{Ангармоническое частное: } \eta = \frac{z_{12} z_{34}}{z_{13} z_{24}}$$

7. Теорема Гаусса:

$$\int_{\Sigma} d^2x \partial_{\mu} F^{\mu} = \frac{i}{2} \int_{\partial\Sigma} (d\bar{z} F^z - dz F^{\bar{z}})$$

$$\partial(1/\bar{z}) = \bar{\partial}(1/z) = \pi \delta^{(2)}(x)$$

$$\Delta \ln |z| = 4\partial\bar{\partial} \ln |z| = 2\pi \delta^{(2)}(x)$$

8. Тождества Уорда: $X = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)$

$$2\langle T_{zz} X \rangle = - \sum_i \delta^{(2)}(x - x_i) h_i \langle X \rangle$$

$$2\langle T_{z\bar{z}} X \rangle = - \sum_i \delta^{(2)}(x - x_i) \bar{h}_i \langle X \rangle$$

$$T(z) = -2\pi T_{zz}, \quad \bar{T}(\bar{z}) = -2\pi T_{\bar{z}\bar{z}}$$

$$\langle T(z) X \rangle = \sum_i \left(\frac{1}{z - z_i} \partial + \frac{h_i}{(z - z_i)^2} \right) \langle X \rangle + \text{reg.}$$

$$\langle \bar{T}(\bar{z}) X \rangle = \sum_i \left(\frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_i} \bar{\partial} + \frac{\bar{h}_i}{(\bar{z} - \bar{z}_i)^2} \right) \langle X \rangle + \text{reg.}$$

$$\delta_\epsilon \langle X \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Sigma} (\bar{\epsilon} d\bar{z} \langle \bar{T} X \rangle - \epsilon dz \langle T X \rangle)$$

9. OPE:

$$\varphi_i(x) \varphi_j(y) = \sum_k c_{ijk}(x, y) \varphi_k(y)$$

$$\langle T(z) \varphi(w) \rangle \sim \left(\frac{h}{(z - w)^2} + \frac{1}{z - w} \partial \right) \varphi(w)$$

10. Свободное скалярное поле:

$$S = g \int d^2x (\partial_{\mu} \varphi)^2 / 2$$

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle = -\frac{1}{2\pi g} \ln |x - y|$$

$$\langle \partial \varphi(z) \partial \varphi(w) \rangle = -\frac{1}{4\pi g} \cdot \frac{1}{(z - w)^2}$$

$$\partial \varphi(z) : (h, \bar{h}) = (1, 0)$$

$$\bar{\partial} \varphi(\bar{z}) : (h, \bar{h}) = (0, 1)$$

$$T = -2\pi g : (\partial \varphi)^2 :$$

$$\bar{T} = -2\pi g : (\bar{\partial} \varphi)^2 :$$

$$: A := A - \langle A \rangle$$

$$T(z) T(w) \sim \frac{2T(w)}{(z - w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z - w} + \frac{1/2}{(z - w)^4}$$

Задачи

1. Показать, что матрица комбинации глобальных конформных преобразований равна произведению их матриц.
2. Выписать матрицы глобальных преобразований, соответствующие дилатациям, трансляциям, поворотам и специальным конформным преобразованиям.
3. Вывести коммутационные соотношения алгебры Витта 4.
4. Показать, что $\partial\varphi$ — вторичное поле, если φ — примарное.
5. Получить корреляторы 6, воспользовавшись инвариантностью теории относительно специальных конформных преобразований.
6. Показать, что
$$\eta' = \frac{z_{14}z_{23}}{z_{13}z_{24}} = 1 - \eta .$$
7. Вывести тождество Уорда для углового момента, воспользовавшись выражением для нетеровского тока $M_{\mu\nu\lambda} = x_\nu T_{\mu\lambda} - x_\lambda T_{\mu\nu}$.
8. Получить формулу для $\Delta \ln |z|$, используя теорему Гаусса 7.
9. Найти $\epsilon(z)$, $\bar{\epsilon}(\bar{z})$ в формуле 8, соответствующие глобальным конформным преобразованиям.
10. Получить закон преобразования двухточечной и трехточечной корреляционных функций из тождеств 8. Получить условия инвариантности корреляторов относительно глобальных конформных преобразований. Показать, что функции 6 удовлетворяют этим условиям.
11. В модели 10 выписать ОРЕ $T(z)T(w)$.

Список литературы

- [1] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, “Conformal field theory,” Springer, 1997.
- [2] J. Polchinsky, “String theory”, Vol. 1, §2, Cambridge University Press, 1998.