CFT–1
(весна 2015)

Формулы, $D \neq 2$

1. Соглашения:
   $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$
   $t = -ix^D$

2. Пример $D = 2$:
   $S = -\frac{1}{2}\int d^2x\, (\partial_\mu X)^2$
   $u = x^1 - x^0$, $v = x^1 + x^0$
   Симметрия: $u \to u'(u)$, $v \to v'(v)$

3. Преобразования:
   $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu$
   $\delta T \equiv T'(x) - T(x) = \pounds_\xi T$
   $\pounds_\xi T^\mu_\nu \equiv \xi^\lambda \partial_\lambda T^\mu_\nu - T^\lambda_\nu \partial_\lambda \xi^\mu + T^\mu_\lambda \partial_\nu \xi^\lambda$

4. Конфомные преобразования:
   $g'_{\mu\nu} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu}$
   $\Omega = 1 + \omega \quad \Rightarrow \quad \pounds_\xi \eta_{\mu\nu} = 2\omega\eta_{\mu\nu}$
   $\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = 2\omega\eta_{\mu\nu}$

5. Конформные преобразования, $D \neq 2$:
   $\xi_\mu = a_\mu + \lambda x_\mu + m_{\mu\nu} x^\nu + (2x_\mu (bx) - b_\mu x^2)$
   $m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu}$

   Большие преобразования:

   (a) Трансляции: $x^{\mu\prime} = x^\mu + A^\mu$

   (b) Дилатации: $x^{\mu\prime} = \Lambda x^\mu$

   (c) Повороты: $x^{\mu\prime} = M^\mu_\nu x^\nu$

   (d) Специальные конформные (SCT)

6. Алгебра Пуанкаре:
   $P_\mu = -i\partial_\mu$
   $L_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$
   $[P_\mu,\, P_\nu] = 0$
   $[P_\mu,\, L_{\nu\lambda}] = i(\eta_{\mu\nu} P_\lambda - \eta_{\mu\lambda} P_\nu)$
   $[L_{\mu\nu},\, L_{\lambda\rho}] = i(\eta_{\mu\rho} L_{\nu\lambda} + \eta_{\nu\lambda} L_{\mu\rho}) - (\mu \leftrightarrow \nu)$

7. Конформная алгебра, $D \neq 2$:
   $D = -ix^\mu \partial_\mu$
   $K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu)$
   $[D,\, P_\mu] = iP_\mu$
   $[D,\, K_\mu] = -iK_\mu$
   $[K_\mu,\, P_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu} D - L_{\mu\nu})$
   $[K_\mu,\, L_{\lambda\rho}] = i(\eta_{\mu\lambda} K_\rho - \eta_{\mu\rho} K_\lambda)$
   $[K_\mu,\, K_\nu] = 0$

8. Представления, $D \neq 2$:
   $L_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$
   $D = \tilde{\Delta} - ix^\mu \partial_\mu$
   $K^\mu = \kappa_\mu + 2x_\mu \tilde{\Delta} - 2x^\nu S_{\mu\nu} - i(2x_\mu (x\partial) - x^2 \partial_\mu)$
   Неприводимое: $\tilde{\Delta} = i\Delta$, $\kappa_\mu = 0$.

9. Токи: $\pi^\mu = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu \varphi)$
   $J^\mu_\xi = \pi^\mu \delta_\xi \varphi - \xi^\mu \mathcal{L}$
   $\theta^\mu{}_\nu = \pi^\mu \partial_\nu \varphi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}$
   $\theta^\mu{}_\nu = T^\mu_\nu + \partial_\rho Y^{\rho\mu}{}_\nu$
   $Y^{\rho\mu}{}_\alpha = -\frac{i}{2}\left[\pi^\rho S^\mu{}_\alpha \varphi - \pi^\mu S^\rho{}_\alpha \varphi - \pi_\alpha S^{\rho\mu} \varphi\right]$
   $J^\mu_D = T^\mu_\nu x^\nu + V^\mu$, где $V^\mu = \Delta \pi^\mu \varphi - Y^{\lambda\mu}{}_\lambda$
   $J^\mu{}_\alpha = (2x_\alpha x^\lambda - x^2 \delta^\lambda_\alpha) T^\mu_\lambda + 2x_\alpha V^\mu$
   $\partial_\mu J^\mu_D = 0 \Rightarrow \partial_\mu J^\mu{}_\alpha = 2V_\alpha$.

10. Уравнения движения:
    $\langle \delta S/\delta\Phi(x) \cdot \Phi(y) \rangle = \delta(x - y)$

11. Корреляторы: $r_{ij} = |x_i - x_j|$
    $$\langle \Phi_1(x'_1) \ldots \Phi_n(x'_n) \rangle = \prod_i \left| \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} \right|^{-\Delta_i/D} \times \langle \Phi_1(x_1) \ldots \Phi_n(x_n) \rangle$$
    $$\langle \Phi_1 \Phi_2 \rangle = \frac{C_{12}\delta_{\Delta_1 \Delta_2}}{r_{12}^{2\Delta_1}}$$
    $$\langle \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \rangle = \frac{C_{123}}{r_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} r_{13}^{\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2} r_{23}^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}}$$
    Ангармонические частные:
    $$\eta = \frac{r_{12} r_{34}}{r_{13} r_{24}}, \qquad \eta' = \frac{r_{12} r_{34}}{r_{23} r_{14}}$$

12. Тождества Уорда: $X = \Phi_1(x_1) \ldots \Phi_n(x_n)$
    $\int d^D x\, \omega_a(x) \partial_\mu \langle J^\mu_a(x) X \rangle = \langle \delta X \rangle$
    $$\partial_\mu \langle T^\mu_\nu(x) X \rangle = -\sum_i \delta(x - x_i) \frac{\partial}{\partial x^\nu_i} \langle X \rangle$$
    $\langle T^\mu_\mu(x) X \rangle = -\sum_i \delta(x - x_i) \Delta_i \langle X \rangle$

13. Пространство AdS_{D+1}:
    Вложение в $\mathbb{R}^{D+2}$ $(i = 1 \dots D)$:
    $X_0^2 + X_{D+1}^2 - X_i^2 = l^2$
    $ds^2 = -dX_0^2 - dX_{D+1}^2 + dX_i^2$
    Симметрия: $SO(2, D)$
    Координаты Пуанкаре: $(t,\, \boldsymbol{x},\, z)$
    $X_0 = lt/z, \qquad \boldsymbol{X} = l\boldsymbol{x}/z,$
    $X_D = \frac{l}{2z} - \frac{lz}{2} - \frac{l}{2z}\left[\boldsymbol{x}^2 - t^2\right]$
    $X_{D+1} = \frac{l}{2z} + \frac{lz}{2} + \frac{l}{2z}\left[\boldsymbol{x}^2 + t^2\right]$
    $ds^2 = \left[-dt^2 + d\boldsymbol{x}^2 + dz^2\right]/z^2$

14. AdS/CFT соответствие:
    Пример: $\mathcal{N} = 4$ SYM в $D = 4$
    $$\parallel$$
    $$SUGRA \text{ в } AdS_5.$$
    Условия: Сильная связь в CFT
    Классическая SUGRA
    Соотношение:
    $\phi(x, z)$ — решение, $\phi(x, 0) = \bar{\phi}(x)$
    Тогда $W_{CFT}[\bar{\phi}] = S_{SUGRA}[\phi]$
    $$\mathrm{e}^{iW_{CFT}[\bar{\phi}]} \equiv \left\langle \mathrm{e}^{i\int \bar{\phi}\, \mathcal{O}_\Delta\, d^4x} \right\rangle$$
    Пример: $S_{AdS} = -\frac{1}{2}\int d^5x\sqrt{-g}\;\left[(\partial_A\phi)^2 + m^2\phi^2\right]$
    $\Delta(\Delta - 4) = m^2$

Задачи

1. Доказать формулу общековариантного преобразования 3.

2. Найти большие специальные конформные преобразования (п. 5d) и соответствующие им конформные факторы $\Omega^2(x)$.

3. Показать, что преобразования 5 образуют подгруппу конформных преобразований в $D = 2$. Такие преобразования называются *глобальными*.

4. Вывести коммутационные соотношения 7.

5. Показать, что конформная алгебра 6, 7 изоморфна $so(D+1,1)$ и $so(D,2)$ для пространств Евклида и Минковского, соответственно.

6. Вывести формулу 8 для K^μ.

7. Проверить, что преобразование

$$\Phi'(x') = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{-\Delta/D} \Phi(x) \tag{1}$$

   есть "большое" конформное преобразование поля с $S_{\mu\nu} = 0$.

8. Доказать, что вариация любого общековариантного действия при координатных преобразованиях равна

$$\delta_\xi S = \int d^D x \left(\frac{\delta S}{\delta \varphi}\delta\varphi - T^{\mu\nu} D_\mu \xi_\nu \sqrt{-g}\right) \equiv 0 \ , \tag{2}$$

   где $T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \cdot \delta S/\delta g^{\mu\nu}$ — гравитационный тензор энергии–импульса. Используя уравнение (2), показать, что конформные токи можно записать в виде $J^\mu_\xi = T^\mu_\nu \xi^\nu$.

9. Показать, что тензор T^μ_ν в п. 9 симметричен на уравнениях движения.
   Указание. Вывести сохраняющийся ток $M_{\mu\nu\lambda}$, соответствующий моменту.

10. Вывести конформный ток $J^\mu{}_\alpha$ в п. 9.

11. Пусть дилатонный ток сохраняется, а $V_\mu = \partial_\alpha L^\alpha{}_\mu$. Показать, что улучшенный тензор энергии–импульса

$$\hat{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{D-2}\left(\partial_\mu \partial^\alpha L_{(\alpha\nu)} + \partial_\nu \partial^\alpha L_{(\alpha\mu)} - \partial^2 L_{(\mu\nu)} - \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta L_{\alpha\beta}\right) - \frac{1}{(D-2)(D-1)}\left(\eta_{\mu\nu}\partial^2 L^\alpha{}_\alpha - \partial_\mu\partial_\nu L^\alpha{}_\alpha\right)$$

   сохраняется является бесследовым. Здесь $L_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(L_{\mu\nu} + L_{\nu\mu})$.

12. Показать, что классическое безмассовое скалярное поле конформно–инвариантно в любой размерности $D \geq 3$. Найти улучшенный тензор энергии–импульса. Какой потенциал можно добавить?

13. Показать, что η и η' инвариантны относительно конформных преобразований.

14. Показать, что трехточечная функция п. 11 преобразуется по правильному закону.

15. Получить метрику AdS_{D+1} в координатах Пуанкаре.

16. Выписать изометрии AdS_{D+1}, соответствующие специальным конформным преобразованиям. Использовать координаты Пуанкаре.

17. Рассмотрим функцию Грина скалярного поля в AdS_5:

$$G(z, x, x') = \frac{cz^{\Delta}}{[z^2 + (x - x')^2]^{\Delta}} \ .$$

Показать, что $G \approx \delta^{(4)}(x - x')$ при $z = \epsilon \to 0$. Найти $c(\epsilon)$.

Список литературы

[1] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, “Conformal field theory,” Springer, 1997.

[2] E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998) [hep-th/9802150].