

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

Кафедра физики частиц и космологии

**Индукцированный распад ложного вакуума
в $(1+1)$ -мерной модели скалярного поля**

Курсовая работа
студента 4 курса
Соболева Ивана Владимировича.

Научные руководители
к.ф.-м.н. Демидов Сергей Владимирович,
к.ф.-м.н. Левков Дмитрий Геннадиевич

Москва, 2014 г.

Содержание

Введение	3
Постановка задачи	3
Метод решения	4
Условие сшивки	4
Решение уравнений	5
Энергия и действие	10
Дискретизация уравнений	12
Результаты	15
Приложение А	18
Приложение В	21

Введение

Физические системы с несколькими вырожденными вакуумами, отделенными друг от друга достаточно высоким потенциальным барьером часто встречаются в различных областях физики и представляют значительный интерес для исследования. Во всех таких системах возможны туннельные процессы между соседними вакуумами, отвечающие за ряд интересных явлений.

В физике твердого тела простейшей моделью дислокаций является т.н. модель струны. Без внешнего воздействия потенциал, в котором находится струна, является периодическим. При внешнем воздействии (например, при наложении внешнего поля) вырождение у потенциала снимается и состояние струны можно считать метастабильным. Интересным является вопрос о распаде этого метастабильного состояния при заданной температуре.[1],[2]

В теории поля особый интерес представляют процессы, происходящие при столкновении частиц высоких энергий такие, как несохранение лептонного и барионного числа [7],[5],[6], распад ложного вакуума [4] и рождение солитонов [3].

Во всех этих моделях, в предположении квазиклассичности системы, процессы туннелирования могут быть связаны с классическими решениями евклидовых уравнений движения. Особый класс таких решений, периодические инстантоны, играют большую роль при описании процессов туннелирования из состояний с определенной энергией, а именно, при вычислении следующей вероятности

$$\sigma_E = \sum_{i,f} |\langle f | \hat{S} \hat{P}_E | i \rangle|^2, \quad (1)$$

где $\hat{S} - S$ - матрица, $\hat{P}_E = |E\rangle\langle E|$ - проектор на состояние с определенной энергией, $|i\rangle$ и $|f\rangle$ - начальное и конечное состояние соответственно. Периодические инстантоны являются периодическими решениями евклидовых уравнений поля

$$\phi(x, \tau) = \phi(x, \tau + 2T)$$

Ранее было показано [8], что в главном квазиклассическом приближении

$$\sigma_E = e^{2ET - S_E}, \quad (2)$$

где S_E - евклидово действие, вычисленное за период.

На самом деле, интересно было бы посчитать вероятность туннелирования из известного начального состояния в известное конечное, но так как полная вероятность туннелирования P_E проще, мы ограничимся вычислением этой величины. Отметим, что вероятность туннелирования при заданной энергии связана с вероятностью туннелирования при данной температуре

$$P_\beta = \int dE e^{-\beta E} \sigma_E \quad (3)$$

Постановка задачи

В данной работе мы рассматриваем двумерную теорию действительного скалярного поля с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \theta(\phi)V_+(\phi) - \theta(-\phi)V_-(\phi), \quad (4)$$

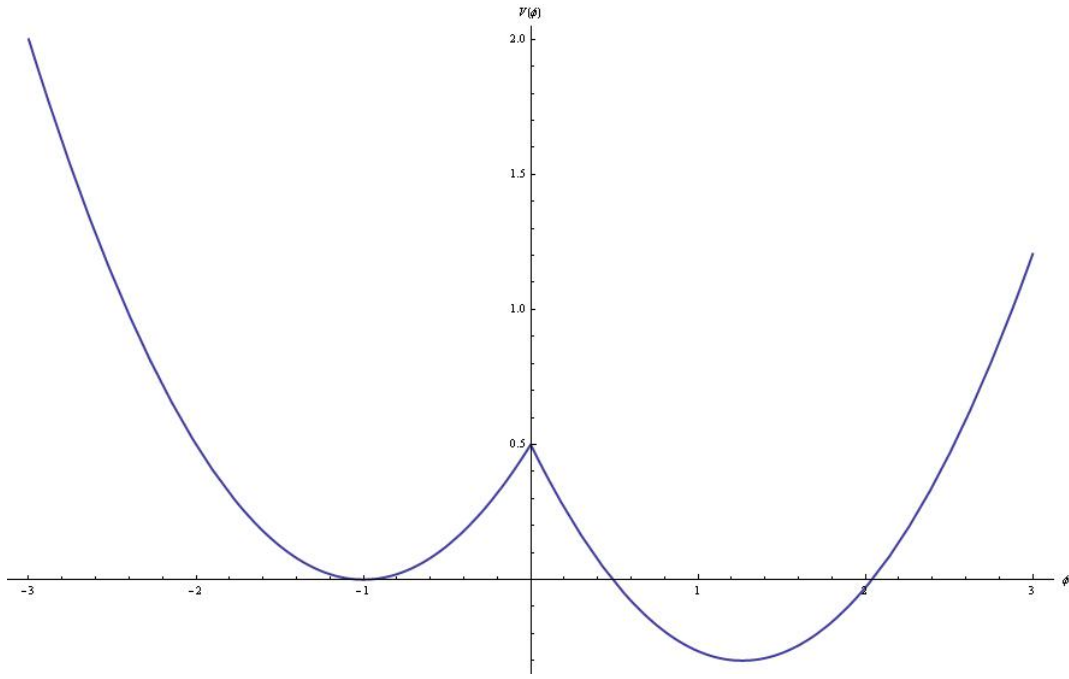


Рис. 1: Качественный вид потенциала, используемого в задаче.

где $\theta(x)$ – θ -функция Хэвисайда, а

$$\begin{aligned} V_+ &= -\epsilon + \frac{1}{2}(\phi - v)^2 \\ V_- &= \frac{1}{2}(\phi + 1)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь 1 , v – положения ложного и истинного вакуума, ϵ – плотность энергии истинного вакуума. Из условия непрерывности $V(\phi)$ при $\phi = 0$ получаем, что $v = \sqrt{1 + 2\epsilon}$.

В этой модели мы будем исследовать туннельные процессы, происходящие при заданной энергии E . Такая модель является удобной для исследования в силу того, что, как будет показано ниже, в ней удастся выписать периодические инстантоны практически в явном виде, что позволяет выйти за рамки тонкостенного приближения при котором $\epsilon \ll 1$.¹ [4]

Метод решения

Условие сшивки

Рассмотрим регуляризованный потенциал

$$V_a(\phi) = \theta_a(\phi)V_+(\phi) + \theta_a(-\phi)V_-(\phi),$$

в котором

$$\theta_a(\phi) = \frac{1}{1 + e^{-\phi/a}}$$

¹В двух крайних случаях решение можно найти явно, в остальных с точностью до контура, на котором $\phi = 0$

При $a \neq 0$ решение евклидовых уравнений поля.

$$\partial_\tau^2 \phi + \partial_x^2 \phi = \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (6)$$

является гладкой функцией τ и x . Рассмотрим контур, определенный уравнением

$$\phi(x_*(s), \tau_*(s)) = 0,$$

где s – координата на контуре. Будем считать, что выполнены условия

$$\begin{aligned} \phi(y, \tau_*(s)) < 0 & \quad \text{при} \quad |y| > x_*(s), \\ \phi(y, \tau_*(s)) > 0 & \quad \text{при} \quad |y| < x_*(s). \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим для начала уравнения поля вдали от контура.

$$\begin{aligned} (\partial_\tau^2 + \partial_x^2 - 1)(\phi - v) &= 0 \quad \text{при} \quad x(s) - y \gg a \\ (\partial_\tau^2 + \partial_x^2 - 1)(\phi + 1) &= 0 \quad \text{при} \quad y - x(s) \gg a \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим теперь область вблизи контура $x_*(s) - y \sim a$. Очевидно, правая часть уравнения (6) равномерно ограничена по a в этой области. Следовательно, вторые производные функции $\phi(x, \tau)$ ограничены в этой области, а значит, первые производные непрерывны при $y = x_*(s)$. Таким образом, мы можем заключить, что при $a \rightarrow 0$ существует контур $\tau = \tau_*(s)$, $x = x_*(s)$ такой, что

$$\begin{cases} (\partial_\tau^2 + \partial_y^2 - 1)(\phi + 1) - (1 + v)\theta(x(\tau) - y) = 0 \\ \phi(x(\tau), \tau) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Решение уравнений

Мы будем искать периодические инстантоны: периодические по τ решения уравнений поля, имеющие точки поворота при $\tau = 0$ и $\tau = T$. Период таких решений равен $2T$. Уравнения поля и граничные условия инвариантны относительно P и T – преобразований ($x \rightarrow -x$, $\tau \rightarrow -\tau$). Поэтому мы будем искать решения, обладающие дополнительной симметрией

$$\phi(x, \tau) = \phi(-x, \tau) = \phi(x, -\tau) = \phi(-x, -\tau)$$

Решим первое из уравнений (9). Затем, из уравнений $\phi(x(\tau), \tau) = 0$ найдем контур $x = x_*(s)$, $\tau = \tau_*(s)$. Частным решением уравнения

$$(\Delta - 1)W(x, y) = -\Phi(x, y)$$

является функция

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int dx' dy' \Phi(x', y') K_0(\sqrt{(y - y')^2 + (x - x')^2})$$

Используя уравнение (9) и условие периодичности, получим, что решением уравнения (9) является функция, где K_0 – функция Грина оператора $(\Delta - 1)$.

$$\phi(x, \tau) = -1 + \frac{1 + v}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_G dx' d\tau' K_0(\sqrt{(x - x')^2 + (\tau - \tau' + 2Tm)^2}), \quad (10)$$

где G – область на плоскости (x, τ) , ограниченная контуром $x = x_*(s)$, $\tau = \tau_*(s)$ и прямыми $\tau = T$ и $\tau = -T$. Область G симметрична относительно замены $x \rightarrow -x$, $\tau \rightarrow -\tau$. Проверим, что решение (10) действительно имеет точки поворота при $\tau = 0$ и $\tau = T$, т.е.

$$\dot{\phi}(x, \tau) \Big|_{\tau=0} = \dot{\phi}(x, \tau) \Big|_{\tau=T} = 0$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \dot{\phi} \Big|_{\tau=0} &= \frac{1+v}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-x_0}^{x_0} dx' K_0(\sqrt{(x-x')^2 + (\tau(x') + 2Tm)^2}) - \\ &- \frac{1+v}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-x_0}^{x_0} dx' K_0(\sqrt{(x-x')^2 + (\tau(x') - 2Tm)^2}) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где во втором слагаемом была сделана замена $m \rightarrow -m$. Аналогичным образом можно убедиться в том, что решение имеет точку поворота при $\tau = T$. Подставляя решение во второе уравнение (9), получаем интегральное уравнение на контур

$$\frac{2\pi}{1+v} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_G dx' d\tau' K_0(\sqrt{(x-x')^2 + (\tau(x) - \tau' + 2Tm)^2}) \quad (12)$$

Рассмотрим теперь частные случаи решения (10).

Критический пузырь

Критический пузырь – это неустойчивое статическое решение евклидовых уравнений поля. В нашем случае

$$\begin{cases} \phi'' = \phi - v \\ \phi > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \phi'' = \phi + 1 \\ \phi < 0 \end{cases}$$

Решение имеет вид

$$\begin{cases} \phi_s = -1 + e^{-|y|-x_0}, & |y| > x_0 \\ \phi_s = v \left(1 - \frac{\cosh y}{\cosh x_0} \right), & |y| < x_0 \end{cases} \quad (13)$$

Из сшивки производной решения при $y = x_0$ получаем уравнение на x_0

$$\tanh x_0 = \frac{1}{v}$$

На качественном уровне критический пузырь – это пузырек размера $\sim x_0$ истинного вакуума в ложном вакууме. Его неустойчивость качественно можно понять, заметив, что пузырек чуть меньшего размера схлопывается, а пузырек чуть большего размера будет неограниченно расширяться, заполняя все пространство.

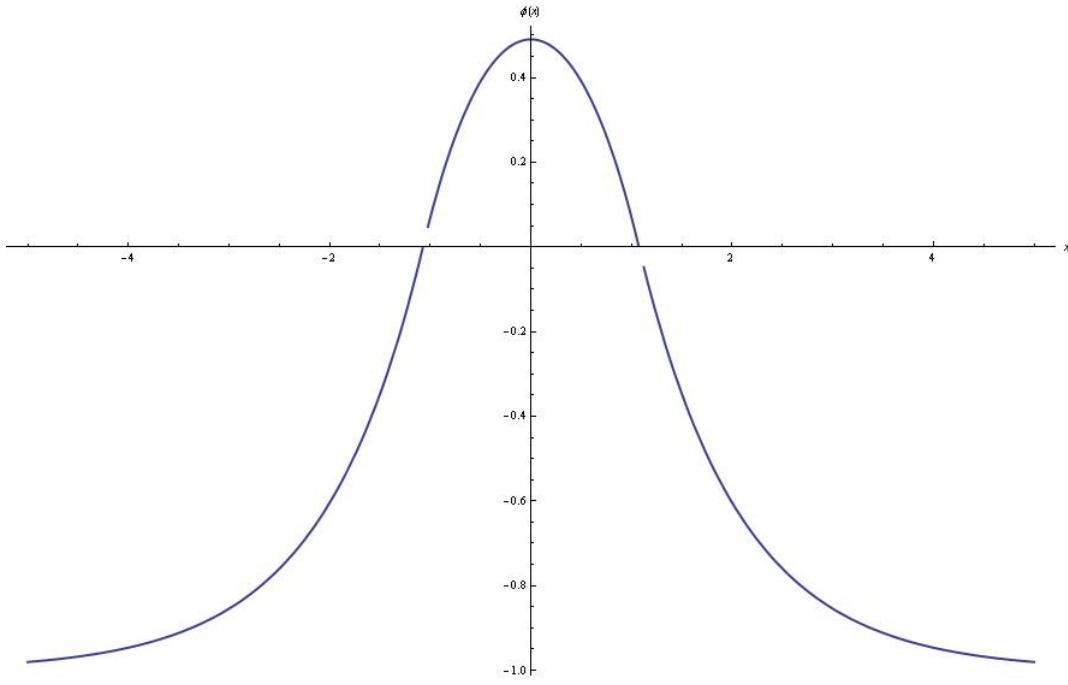


Рис. 2: Качественный вид критического пузыря.

Энергия критического пузыря

$$E_{sph} = (1 + v) (1 - v \cdot x_0 + x_0) \quad (14)$$

Покажем более строго, что решение (13) неустойчиво, т.е. в спектре возмущений над ним присутствует отрицательная мода. Для этой цели нам будет удобно воспользоваться регуляризованным потенциалом

$$V_a(\phi) = \frac{1}{2}(\phi + 1)^2 - \theta_a(\phi) \phi (1 + v)$$

Рассмотрим возмущения над критическим пузырем (здесь мы воспользуемся уравнениями поля в обычном времени t)

$$\phi(x, t) = \phi_s(x) + \varphi(x, t) = \phi_s(x) + e^{i\omega t} \varphi(x)$$

При подстановке в уравнения поля имеем

$$-\varphi'' + V''(\phi_s)\varphi = \omega^2 \varphi$$

Последнее уравнение по форме совпадает со стационарным уравнением Шредингера в потенциале

$$U_a(x) = V_a''(\phi_s(x)) = 1 - (1 + v)(\theta_a''(\phi_s)\phi_s + 2\theta_a'(\phi_s))$$

В пределе $a \rightarrow 0$, с учетом того, что $\phi(x_0) = 0$

$$U(x) = 1 - 2(1 + v)\delta(x - x_0),$$

Уравнение Шредингера с таким потенциалом имеет отрицательное собственное значение

$$E_- = -(2v + v^2)$$

Следовательно, критический пузырь неустойчив. Можно показать (см. Приложение), что показатель экспоненты подавления на критическом пузыре равен 0. Таким образом, при $E > E_{sph}$ вероятность распада ложного вакуума не будет экспоненциально подавлена, $\sigma_E \sim 1$. Кроме того, если мы рассматриваем процесс при конечной температуре, то, вообще говоря, имеется ненулевая вероятность того, что начальное состояние имеет энергию $E \geq E_{sph}$. В этом случае, как мы уже сказали, процесс распада будет чисто классическим и вероятность распада будет подавлена бoльцманновской экспонентой

$$\Gamma \sim e^{-\frac{E_{sph}}{T}}$$

Может случиться так, что даже при $T \ll E_{sph}$ эта величина будет превышать туннельную экспоненту, поэтому начиная с некоторой температуры доминирующим механизмом распада становятся тепловые прыжки. [12]

Покажем теперь явно, что уравнение (12) автоматически выполняется на решении уравнений поля, соответствующем критическому пузырю. Для статического решения уравнение (12) принимает следующий вид

$$\frac{2\pi}{1+v} = \int_{-x_0}^{x_0} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' K_0(\sqrt{(x_0 - x')^2 + (\tau - \tau')^2}) \quad (15)$$

Вычислим интеграл в правой части этого уравнения. Очевидно, он не зависит от τ . Воспользуемся этим фактом и будем вычислять его в точке $\tau = 0$.

$$\begin{aligned} 2 \int_{-x_0}^{x_0} dx' \int_0^{+\infty} K_0(\sqrt{(x_0 - x')^2 + \tau'^2}) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{k \omega_k^2} (1 - e^{2ikx_0}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{\sin(2kx_0)}{k \omega_k^2} = \\ &= \pi(1 - e^{-2x_0}) = \frac{2\pi}{1+v} \end{aligned} \quad (16)$$

При вычислении интеграла мы использовали интегральное представление функции Бесселя и уравнение

$$\tanh x_0 = \frac{1}{v}$$

Отскоковое решение

Для количественного описания туннелирования при нулевой энергии найдем отскоковое решение уравнений поля. Отскоковым называется решение евклидовых уравнений поля, которое стремится к ложному вакууму при $\tau \rightarrow \pm\infty$ и имеет точку поворота при $\tau = 0$. [12]. Обои́м этим требованиям можно удовлетворить, если рассматривать аксиально-симметричные решения, удовлетворяющие начальному условию

$$\phi(r=0) = -1 \quad (17)$$

и

$$\left. \frac{d\phi}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (18)$$

Тогда

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \frac{\tau}{r} \left. \frac{d\phi}{dr} \right|_{\tau=0} = 0.$$

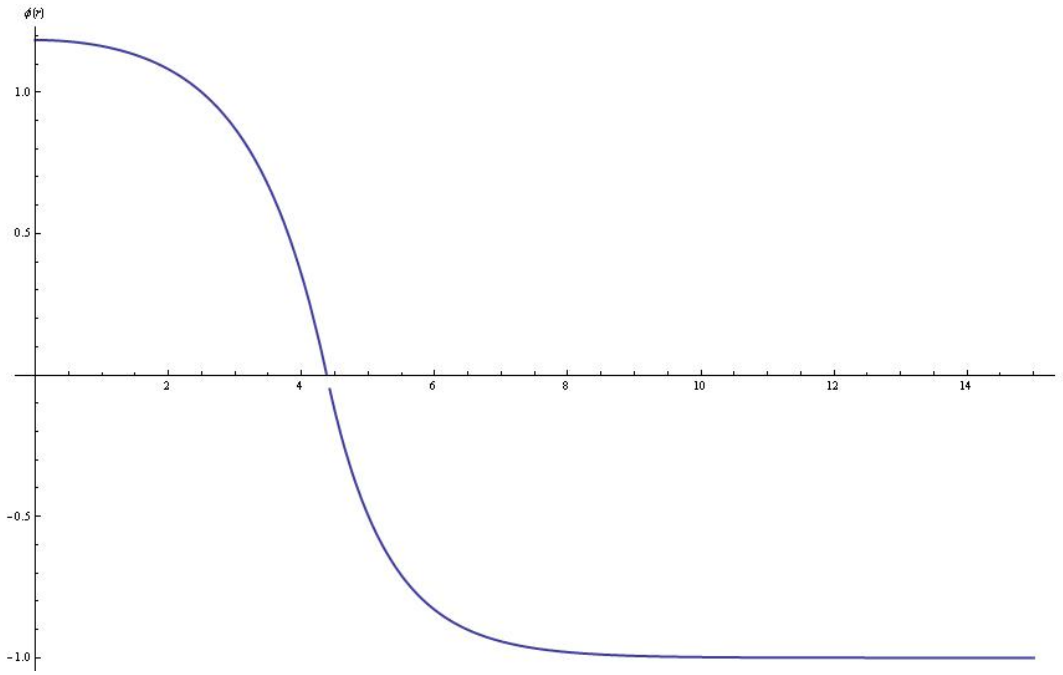


Рис. 3: Качественный вид отскокового решения.

В последнем выражении точка $r = 0$ не является особой благодаря начальному условию (18). Для аксиально-симметричных решений уравнения поля принимают вид

$$\phi''(r) + \frac{1}{r}\phi'(r) = \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (19)$$

Решение уравнения (19) с граничными условиями (17) и (18) является следующая функция:

$$\phi(r) = \begin{cases} v - v \frac{I_0(r)}{I_0(R)}, & r < R, \\ -1 + \frac{K_0(r)}{K_0(R)}, & r > R. \end{cases} \quad (20)$$

Радиус инстантона определим из условия непрерывности первых производных в точке $r = R$. Имеем:

$$v \frac{I_1(R)}{I_0(R)} = \frac{K_1(R)}{K_0(R)},$$

откуда

$$I_1(R) K_0(R) = \frac{1}{R(1+v)}. \quad (21)$$

Покажем теперь явно, что отскоковое решение проходит через уравнение (12) при $T \rightarrow +\infty$. Для этого заметим, что при $T \rightarrow +\infty$ уравнение (12) сводится к уравнению

$$\frac{2\pi}{1+v} = \int_G dx' d\tau' K_0(\sqrt{(x-x')^2 + (\tau(x) - \tau')^2}),$$

а область G является кругом с радиусом, определяемым из уравнения (21). Вычислим интеграл в правой части уравнения (12):

$$\begin{aligned} \int_G dx' d\tau' K_0(\sqrt{(x-x')^2 + (\tau(x) - \tau')^2}) &= \frac{1}{2} \int dx' d\tau' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\omega_k} e^{i k(x-x') - \omega |\tau(x) - \tau'|} = \\ &= \int_{-R}^{+R} d\tau' \int_0^{+\infty} \frac{dk}{k \omega_k} \sin(kx') \sin(kx) e^{-\omega_k |\tau - \tau'|} = -\frac{1}{2i} \oint_{\partial G} d\tau' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{k \omega_k} e^{i k(x'-x) - \omega_k |\tau' - \tau|}. \end{aligned} \quad (22)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} x &= R \sin \alpha, & \tau &= R \cos \alpha \\ x' &= R \sin \alpha' & \tau' &= R \cos \alpha' \\ k &= \sinh \psi & \omega_k &= \cosh \psi \end{aligned}$$

и покажем что последний интеграл в (22) не зависит от α . Для этого покажем, что отскоковое решение проходит через уравнение

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{\tau(x)} = 0$$

при $T \rightarrow +\infty$. Действительно,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{\tau(x)} &= \oint \left(\frac{d\tau}{dx} dx' - d\tau' \right) K_0(\sqrt{(x-x')^2 + (\tau - \tau')^2}) = \oint d\alpha' \sin(\alpha - \alpha') K_0\left(2R \left| \sin\left(\frac{\alpha - \alpha'}{2}\right) \right|\right) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\gamma \sin \gamma K_0\left(2R \left| \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \right|\right) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Воспользуемся этим фактом и вычислим интеграл в (22) в точке $\alpha = 0$. Получаем, используя выражения для $x, x', \tau, \tau', k, \omega_k$.

$$\begin{aligned} \frac{R}{2i} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha' \sin \alpha' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi}{\sinh \psi} \exp[R \cos(\alpha' - i\psi) - R \cosh \psi] &= \\ = \frac{R}{2i} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha' \sin \alpha' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi}{\sinh \psi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n(R) e^{i n \alpha' + n \psi} e^{-R \cosh \psi} \end{aligned} \quad (24)$$

В последнем выражении после интегрирования по α' из суммы по n выживают только слагаемые с $n = \pm 1$:

$$\pi R I_1(R) \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi e^{-R \cosh \psi} = 2\pi R I_1(R) K_0(R) = \frac{2\pi}{1+v}, \quad (25)$$

где в последнем выражении мы воспользовались уравнением (21). Сравнивая (22) и (25), получаем уравнение (12).

Энергия и действие

Для нахождения энергии конфигурации удобно переписать потенциал в следующем виде

$$V(\phi) = V_+(\phi)\theta(\phi) + V_-(\phi)\theta(-\phi) = \frac{1}{2}(\phi + 1)^2 - \theta(\phi)\phi(1+v)$$

Тогда, с учетом того, что решение (10) симметрично относительно замены $y \rightarrow -y$ энергия конфигурации поля может быть записана как

$$E = 2(1+v)x_* + \int_0^{+\infty} dy (-\dot{\phi}^2 + (\phi')^2 + (\phi+1)^2 - 2\theta(x_*(\tau) - y)(\phi+1)) \quad (26)$$

где точка означает производную по евклидовому времени. Переходя к Фурье-образу решения по формуле

$$\phi(x, \tau) = -1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} dk \cos(ky) \phi_k(\tau)$$

имеем

$$E = 2(1+v)x_*(\tau) + \int_0^{+\infty} dk (-\dot{\phi}_k^2 + \omega_k^2 \phi_k^2) - 2(1+v) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} dk \frac{\phi_k}{k} \sin(k x_*(\tau)) \quad (27)$$

Проверим сохранение энергии на решениях (10)

$$\begin{aligned} \dot{E} &= 2(1+v)\dot{x}_*(\tau) + \int_0^{+\infty} dk (-2\dot{\phi}_k \ddot{\phi}_k + 2\omega_k^2 \dot{\phi}_k \phi_k) - \\ &- 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1+v) \int_0^{+\infty} \frac{dk}{k} (\dot{\phi}_k \sin(k x_*(\tau)) + \phi_k \cos(k x_*(\tau)) k) \dot{x}_* = \\ &= 2(1+v) \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} dk \phi_k \cos(k x_*(\tau)) \right) = -2(1+v)\dot{x}_*(\tau) \phi(x_*(\tau), \tau) = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

где в первом выражении мы использовали евклидовы уравнения поля

$$-\ddot{\phi}_k + \omega_k^2 \phi_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1+v}{k} \sin(k x_*(\tau))$$

Мы будем вычислять энергию поля при $\tau = 0$, где $\dot{\phi} = 0$. Вычислим Фурье-амплитуды решения (10)

$$\phi_k(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} dy (1 + \phi(y, 0)) \cos(ky) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1+v}{k \omega_k} \frac{J_k + e^{2\omega_k T} I_k}{e^{2\omega_k T} - 1}, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} J_k &= \int_0^{\tau_0} d\tau e^{\omega_k \tau'} \sin(k x_*(\tau')) \\ I_k &= \int_0^{\tau_0} d\tau e^{-\omega_k \tau'} \sin(k x_*(\tau')) \end{aligned}$$

У уравнении (29) использовалось интегральное представление функции Бесселя. В выражении для I_k и J_k τ_0 обозначает вершину контура, где

$$x_*(\tau_0) = 0, \quad \tau_0 > 0$$

Подставляя (29) в (27), получаем следующее выражении для энергии

$$E = 2(1+v)x_0 - \frac{(1+v)^2}{2} (2x_0 + e^{-2x_0} - 1) + \frac{2(1+v)^2}{\pi} \int_0^{+\infty} dk J^2(k), \quad (30)$$

где

$$J(k) = \frac{1}{\omega_k} \int_{x_0}^{x_1} dx \frac{\sinh(\omega_k(T - \tau))}{\sinh(\omega_k T)} \cos(kx)$$

В последнем выражении $\tau_*(x_1) = 0$, $x_0 = x_*(\tau_0)$.

Запишем евклидово действие

$$\begin{aligned} S_E &= \int_{G \cup \bar{G}} dx d\tau \left(\frac{1}{2} (\partial_\tau \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + V(\phi) \right) = - \int_{\bar{G}} dx d\tau \left(\frac{1}{2} (\phi + 1) \partial_x^2 \phi - \frac{1}{2} (\phi + 1) \partial_\tau^2 \phi + V(\phi) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\partial G} (dx \partial_\tau \phi - d\tau \partial_x \phi) + \int_G \left(-\frac{1}{2} (\phi - v) \partial_x^2 \phi - \frac{1}{2} (\phi - v) \partial_\tau^2 \phi + V(\phi) \right) + \frac{v}{2} \int_{\partial G} (dx \partial_\tau \phi - d\tau \partial_x \phi) = \quad (31) \\ &= \frac{1+v}{2} \int_{\partial G} (dx \partial_\tau \phi - d\tau \partial_x \phi) - \epsilon \sigma_G, \end{aligned}$$

где мы проинтегрировали по частям как в области G , так и в области \bar{G} и использовали в этих областях евклидовы уравнения поля, а σ_G – площадь области G .

Дискретизация уравнений

Вследствие симметрии контура ∂G относительно замен $\tau \rightarrow -\tau$ и $x \rightarrow -x$ будем искать ту часть контура, которая лежит в квадранте $x > 0$, $\tau > 0$. Для численного решения уравнения (12) удобным оказывается следующий подход. Выберем некоторый параметр вдоль контура $s \in [0, 1]$. Введем решетку

$$\begin{aligned} s_i, \quad i = 0, N_s \\ s_0 = 0, \quad s_{N_s} = 1 \\ ds_j = s_{j+1} - s_j \end{aligned} \quad (32)$$

Наиболее простым с точки зрения минимизации времени вычисления оказывается накладывать уравнение $\phi(x, \tau) = 0$ всего в одной точке контура, а в остальных точках накладывать уравнение $\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{\tau(x)} = 0$. Из (10) получим

$$0 = \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{\tau(x)} = \frac{1+v}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \oint_{\partial G} \left(dx' \frac{d\tau}{dx} - d\tau' \right) K_0(\sqrt{(x-x')^2 + (\tau-\tau' + 2Tm)^2}) \quad (33)$$

или в дискретизованном виде с учетом симметрии контура

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_j = & \sum_{m=-M}^M \sum_{j=0}^{N_s-1} ds_j \left\{ \left(\frac{\tau_{n+1} - \tau_{n-1}}{s_{n+1} - s_{n-1}} \cdot \frac{x_{j+1} - x_j}{s_{j+1} - s_j} - \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{s_{n+1} - s_{n-1}} \cdot \frac{\tau_{j+1} - \tau_j}{s_{j+1} - s_j} \right) \times \right. \\
& \times K_0 \left(\sqrt{\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2} - x_n \right)^2 + \left(\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2} - \tau_n + 2Tm \right)^2} \right) + \\
& + \left(\frac{\tau_{n+1} - \tau_{n-1}}{s_{n+1} - s_{n-1}} \cdot \frac{x_{j+1} - x_j}{s_{j+1} - s_j} + \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{s_{n+1} - s_{n-1}} \cdot \frac{\tau_{j+1} - \tau_j}{s_{j+1} - s_j} \right) \times \\
& \times K_0 \left(\sqrt{\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2} + x_n \right)^2 + \left(\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2} - \tau_n + 2Tm \right)^2} \right) - \\
& - \left(\frac{\tau_{n+1} - \tau_{n-1}}{s_{n+1} - s_{n-1}} \cdot \frac{x_{j+1} - x_j}{s_{j+1} - s_j} - \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{s_{n+1} - s_{n-1}} \cdot \frac{\tau_{j+1} - \tau_j}{s_{j+1} - s_j} \right) \times \\
& \times K_0 \left(\sqrt{\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2} + x_n \right)^2 + \left(\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2} + \tau_n + 2Tm \right)^2} \right) - \\
& - \left(\frac{\tau_{n+1} - \tau_{n-1}}{s_{n+1} - s_{n-1}} \cdot \frac{x_{j+1} - x_j}{s_{j+1} - s_j} + \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{s_{n+1} - s_{n-1}} \cdot \frac{\tau_{j+1} - \tau_j}{s_{j+1} - s_j} \right) \times \\
& \times K_0 \left(\sqrt{\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2} - x_n \right)^2 + \left(\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2} + \tau_n + 2Tm \right)^2} \right) \left. \right\} = 0
\end{aligned} \tag{34}$$

Дискретизованное уравнение $\phi(x, \tau(x)) = 0$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=-M}^M \sum_{j=0}^{N_s} ds_j \frac{\tau_{j+1} - \tau_k}{s_{j+1} - s_j} \frac{x_j + x_{j+1}}{2} \sum_{k=0}^{N_r} \frac{dr_k}{2} \left\{ K_0 \left(\sqrt{\left(r_k \frac{x_j + x_{j+1}}{2} - x_{po} \right)^2 + \left(\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2} - \tau_{po} + 2Tm \right)^2} \right) + \right. \\
& + K_0 \left(\sqrt{\left(r_k \frac{x_j + x_{j+1}}{2} + x_{po} \right)^2 + \left(\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2} - \tau_{po} + 2Tm \right)^2} \right) + \\
& + K_0 \left(\sqrt{\left(r_k \frac{x_j + x_{j+1}}{2} + x_{po} \right)^2 + \left(\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2} + \tau_{po} + 2Tm \right)^2} \right) + \\
& \left. + K_0 \left(\sqrt{\left(r_k \frac{x_j + x_{j+1}}{2} - x_{po} \right)^2 + \left(\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2} + \tau_{po} + 2Tm \right)^2} \right) \right\} = \phi(x_{po}, \tau_{po}) = 0
\end{aligned} \tag{35}$$

где мы ввели еще одну сетку

$$r_k, k = 0, N_r, \quad dr_k = r_{k+1} - r_{k-1}$$

для интегрирования внутри области, ограниченной контуром. Кроме того, в каждой точке наложим уравнение на длину контура

$$\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{s_{i+1} - s_i} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{i+1} - \tau_i}{s_{i+1} - s_i} \right)^2 = L_s^2$$

В зависимости от того, при каких энергиях рассматривается туннелирование (вблизи нуля или вблизи энергии сфалерона) на решение необходимо наложить различные граничные условия путем фиксирования некоторых точек контура.

На инстантонной ветке (при низких энергиях)

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 0 \\ x_{N_s} &= 0 \end{aligned}$$

На сфалеронной ветке (при высоких энергиях)

$$\begin{aligned}\tau_0 &= 0 \\ \tau_{N_s} &= T\end{aligned}$$

После этого у нас остается $2 \cdot N_s + 1$ неизвестных и $2 \cdot N_s + 1$ уравнение

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \Big|_j + \frac{d\phi}{dx} \Big|_{j+1} \right) = 0, & j = 0, N_s - 1 \\ \phi(x_{po}, \tau_{po}) = 0 \\ \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{s_{i+1} - s_i} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{i+1} - \tau_i}{s_{i+1} - s_i} \right)^2 = L_s^2, \end{cases} \quad (36)$$

которые мы решаем итеративно, зная что при $T \rightarrow +\infty$ решением уравнений является инстантон, а при энергиях вблизи сфалерона решением является сфалерон с отрицательной модой.

Результаты

В данной работе была рассмотрена модель действительного скалярного поля в $(1+1)$ -мерии. Были рассмотрены процессы при заданной энергии и найдены все периодические инстантоны – решения классических уравнений поля, определяющие вероятность туннелирования. Ниже кратко приведены основные результаты.

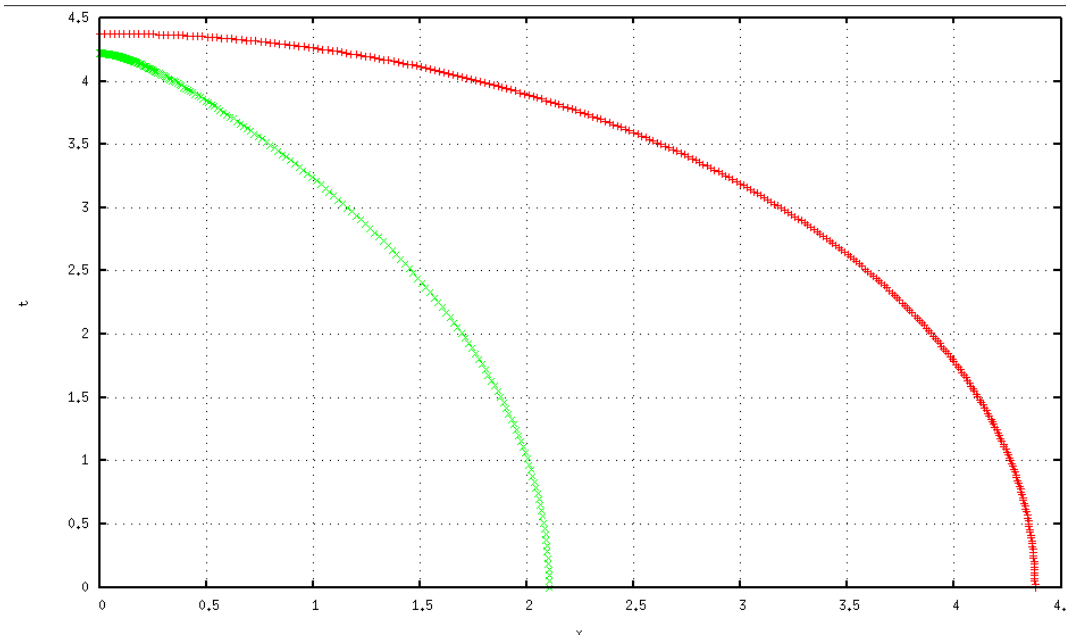


Рис. 4: Несколько решений на инстантонной ветке

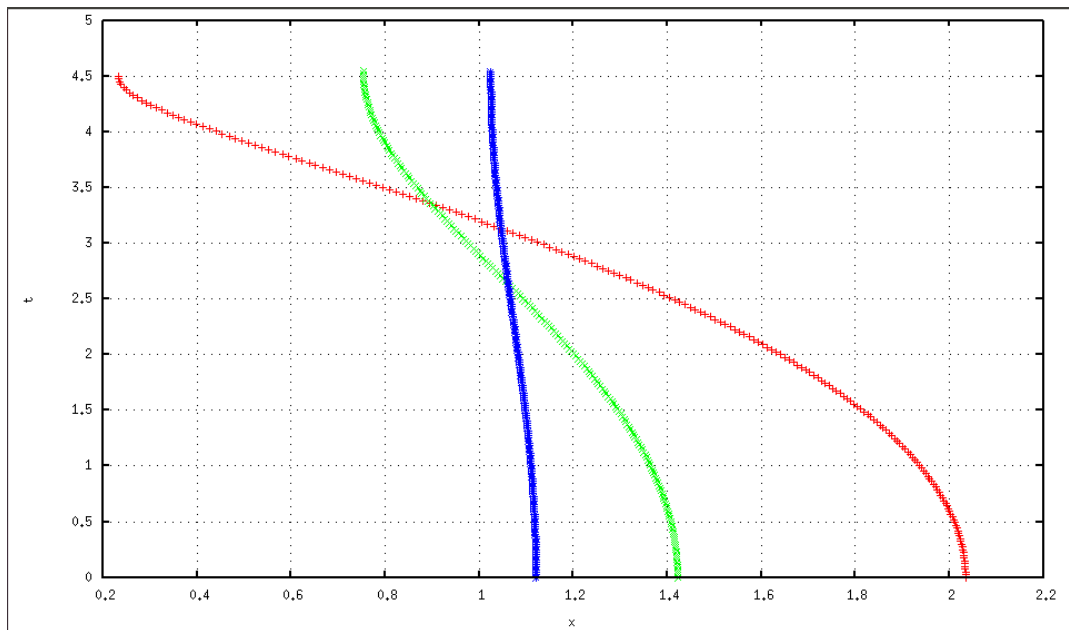


Рис. 5: Несколько решений на сфалеронной ветке

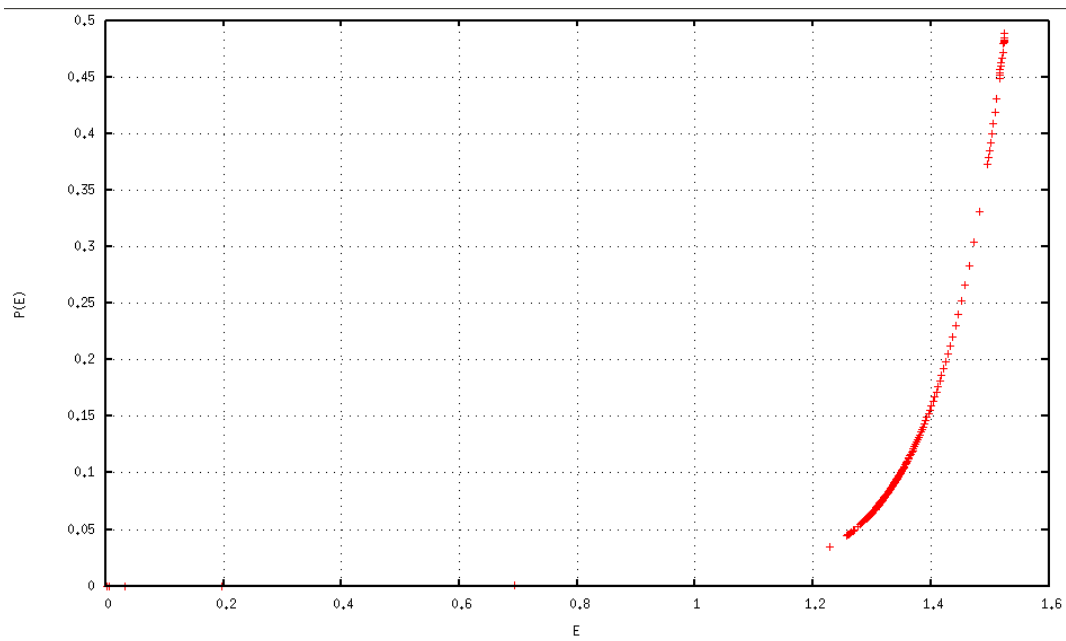


Рис. 6: Зависимость вероятности туннелирования от энергии

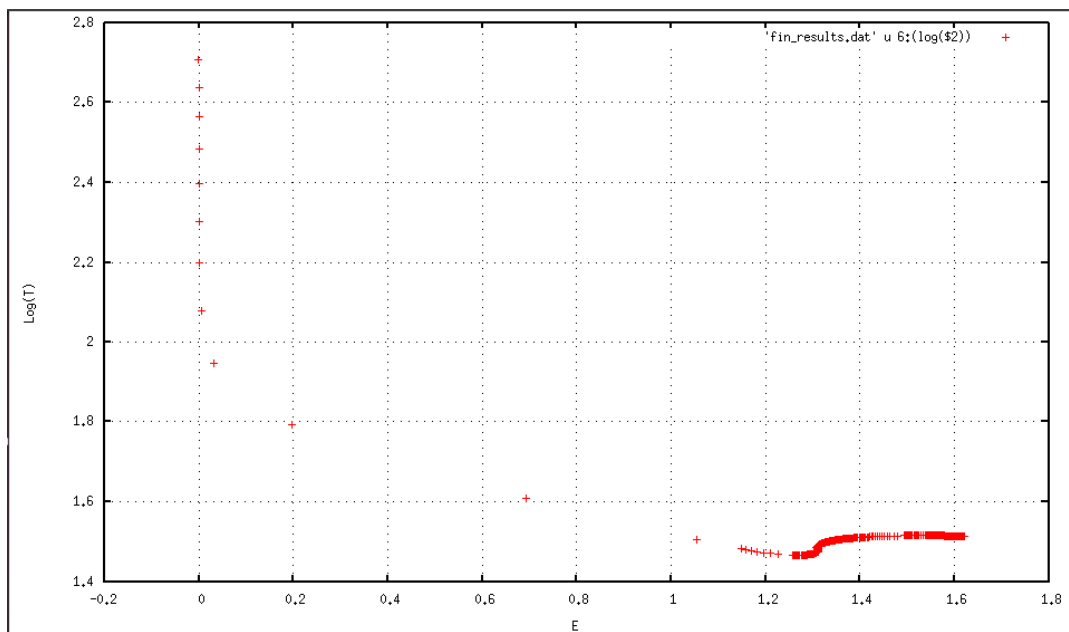


Рис. 7: Зависимость периода инстантонов от энергии (в логарифмическом масштабе)

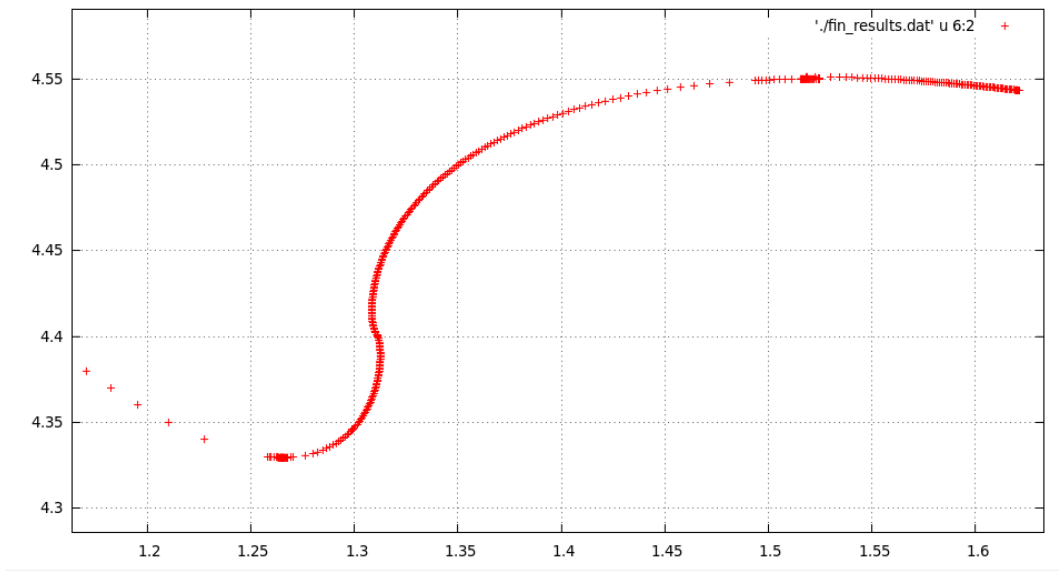


Рис. 8: Зависимость периода инстантонов от энергии вблизи пересечения веток решений.

Приложение А

В этом приложении мы выведем формулу для полной вероятности туннелирования σ_E в главном квазиклассическом приближении. Практически во всем мы будем следовать статье [8]. Для удобства дальнейшего изложения введем следующие обозначения. Когерентное состояние будем обозначать

$$|\{a_k\}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |a\rangle$$

Соответственно, континуальный интеграл в голоморфном представлении будем обозначать как

$$\int \mathcal{D} a_k \mathcal{D} a_k^* \exp\left[-\int dk a_k^* a_k\right] \stackrel{\text{def}}{=} \int da^* da \exp(-a^* a)$$

Например, единичный оператор в наших обозначениях будет иметь вид

$$\int da^* da \exp(-a^* a) |a\rangle \langle a| = 1$$

Когерентное состояние в теории поля (собственное состояние оператора уничтожения) [10]

$$\langle \phi | a \rangle = \exp\left[\int dk \left\{ -\frac{1}{2} a_k a_{-k} - \frac{1}{2} \omega_k \phi(k) \phi(-k) + \sqrt{2\omega_k} a_k \phi(k) \right\}\right]$$

Для дальнейшего изложения нам потребуются ядра проектора \hat{P}_E и S -матрицы в голоморфном представлении.

Сначала получим ядро проектора \hat{P}_E в голоморфном представлении. Для этого будем считать, что рассматриваемая система находится в ящике и спектр ее гамильтониана дискретен. В конце вычислений возьмем предел $V \rightarrow +\infty$. Итак,

$$\begin{aligned} \langle \beta | \hat{P}_E | \alpha \rangle &= \sum_{\{n_k\}} \langle \beta | \{n_k\} \rangle \langle \{n_k\} | \alpha \rangle \delta(E - \sum E_k n_k) = \\ &= \int_0^{2\pi} e^{iE\xi} \prod_{k_i} \sum_{n_{k_i}=0}^{+\infty} \frac{(\beta_{k_i}^* \alpha_{k_i})^{n_{k_i}}}{n_{k_i}!} (e^{-i\xi E_{k_i}})^{n_{k_i}} \\ &\stackrel{V \rightarrow +\infty}{=} \int_0^{2\pi} d\xi \exp\left(-iE\xi + \int d^3k \beta_k^* \alpha_k e^{i\xi E_k}\right) = \\ &= \int_0^{2\pi} d\xi e^{-iE\xi} \langle c | a e^{iE\xi} \rangle \end{aligned} \tag{37}$$

где мы использовали базис чисел заполнения $|\{n_k\}\rangle$ и интегральное представление кронекеровской дельта-функции. Получим теперь ядро S -матрицы в голоморфном представлении. По определению, S -матрицей называется оператор

$$\hat{S} = \lim_{\substack{T_f \rightarrow +\infty \\ T_i \rightarrow -\infty}} e^{iH_0 T_f} e^{-iH(T_f - T_i)} e^{-iH_0 T_i}$$

Как известно [?], для произвольного оператора \hat{O} с ядром $O(a^*, a)$ оператор

$$e^{iH_0 T_f} \hat{O} e^{-iH_0 T_i}$$

имеет ядро

$$O(a^* e^{i\omega T_f}, a e^{-i\omega T_i})$$

Учитывая этот факт и явный вид когерентных состояний в теории поля [10], получаем следующее выражение

$$\begin{aligned}
\langle b|S|a\rangle &= \int \mathcal{D}[\phi_i]\mathcal{D}[\phi_f]\langle b|\phi_f\rangle\langle\phi_f|\hat{S}|\phi_i\rangle\langle\phi_i|a\rangle = \\
&= \lim_{\substack{T_f\rightarrow+\infty \\ T_i\rightarrow-\infty}} \langle\phi_f|e^{iH_0T_f}\hat{U}e^{-iH_0T_i}|\phi_i\rangle = \int \mathcal{D}[\phi_f]\mathcal{D}[\phi_i] \int_{\substack{\phi(T_f)=\phi_f, \\ T_f\rightarrow+\infty \\ \phi(T_i)=\phi_i, \\ T_i\rightarrow-\infty}} \mathcal{D}[\phi]e^{B_i(\phi_i)+B_f(\phi_f)+iS[\phi]} = \\
&= \int \mathcal{D}[\phi]e^{B_i(\phi_i,a)+B_f(\phi_f,b)+iS[\phi]},
\end{aligned} \tag{38}$$

где

$$\begin{aligned}
B_i(\phi_i, a) &= -\frac{1}{2} \int dk a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k T_i} - \frac{1}{2} \int dk \phi_i(k) \phi_i(-\vec{k}) \omega_k + \int dk \sqrt{2\omega_k} e^{-i\omega_k T_i} \phi_i(k) a_k \\
B_f(\phi_f, b) &= -\frac{1}{2} \int dk b_k^* b_{-k}^* e^{-2i\omega_k T_i} - \frac{1}{2} \int dk \phi_f(k) \phi_f(k) \omega_k + \int dk \sqrt{2\omega_k} e^{i\omega_k T_f} \phi_f(k) b_k^*
\end{aligned}$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая величина

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_E(b^*, a) &= \langle b|\hat{S}\hat{P}_E|a\rangle = \int dc^* dc \exp(-c^* c) \mathcal{S}(b^*, c) P_E(c^*, a) = \\
&= \int \mathcal{D}[\phi] d\xi \mathcal{D}c^* \mathcal{D}c e^{-c^* c} e^{iS[\phi]} \langle b|e^{i\omega T_f}|\phi_f\rangle \langle\phi_i|c e^{-i\omega T_i}\rangle e^{-iE\xi} \langle c|a e^{i\xi E}\rangle = \\
&= \int d\xi \mathcal{D}[\phi] e^{iS[\phi]} \langle b^*|e^{i\omega T_f}|\phi_f\rangle \langle\phi_i|a e^{iE\xi-i\omega T_i}\rangle e^{-iE\xi} = \int \mathcal{D}[\phi] d\xi e^{F(\phi, \xi)},
\end{aligned} \tag{39}$$

где

$$\begin{aligned}
F(\phi, \xi) &= \int dk \left\{ -\frac{1}{2} a_k a_{-k} e^{2i\xi E - 2i\omega_k T_i} - \frac{1}{2} \omega_k \phi_i(k) \phi_i(-k) + \sqrt{2\omega_k} a_k e^{iE\xi - i\omega_k T_i} \phi_i(k) \right\} + \\
&+ \int dk \left\{ -\frac{1}{2} b_k^* b_{-k}^* e^{2i\omega_k T_f} - \frac{1}{2} \omega_k \phi_f(k) \phi_f(-k) + \sqrt{2\omega_k} b_k^* e^{i\omega_k T_f} \phi_f(k) \right\} + iS[\phi] - iE\xi
\end{aligned} \tag{40}$$

Интеграл в выражении (39) возьмем седловым методом. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\delta F}{\delta \phi} = 0 \\ \frac{\delta F}{\delta \xi} = 0. \end{cases} \tag{41}$$

Вариация по полям в промежуточные моменты времени дает уравнения поля:

$$\frac{\delta F}{\delta \phi} = \frac{\delta S}{\delta \phi} = 0$$

Используя вариацию действия по полям в начальный и конечный моменты времени,

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_i(k)} = -\dot{\phi}_i(-k), \quad \frac{\delta S}{\delta \phi_f(k)} = \dot{\phi}_f(-k)$$

получаем граничные условия для уравнений поля. Например, вариация по $\phi_i(k)$ дает

$$\frac{\delta F}{\delta \phi_i} = \frac{\delta B_i}{\delta \phi_i} + \imath \frac{\delta S}{\delta \phi_i} = -\imath \phi_i(-k) - \omega_k \phi_i(-k) + a_k e^{\imath E \xi - \imath \omega_k T_i} \sqrt{2\omega_k} = 0 \quad (42)$$

Аналогично, из вариации по $\phi_f(k)$ получаем

$$\frac{\delta F}{\delta \phi_i} = \imath \dot{\phi}_f(-k) - \omega_k \phi_f(-k) + \sqrt{2\omega_k} + b_{-k}^* e^{\imath \omega_k T_f} = 0 \quad (43)$$

Еще одно уравнение получаем из вариации $F(\phi, \xi)$ по ξ :

$$-\imath E - \imath \int dk a_k a_{-k} e^{2\imath \omega_k \xi - 2\imath \omega_k T_i} + \imath \omega_k \int dk a_k e^{\imath \omega_k \xi - \imath \omega_k T_i} \phi_i(k) \sqrt{2\omega_k} = 0 \quad (44)$$

Дальше систему удобно рассматривать на контуре, изображенном на рисунке. Действитель-

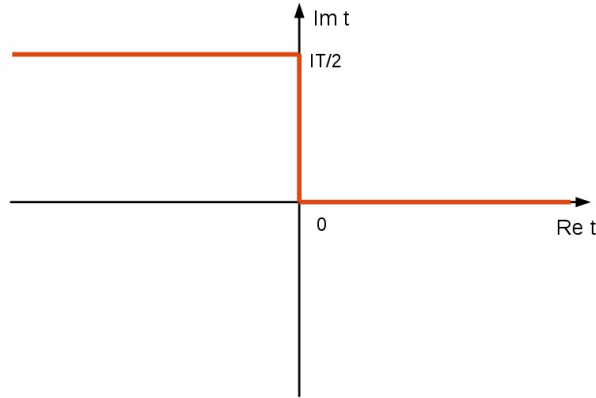


Рис. 9: Контур, на котором определено решение.

но, т.к. S -матрица независит от начального и конечного времени, то можно предположить, что, например, начальное время T_i имеет ненулевую мнимую часть. В частности, нас будет интересовать случай, когда эта мнимая часть равна половине периода инстантона.

Запишем граничные условия для уравнений поля ($t_i = Re T_i$):

$$\begin{aligned} \phi|_{T_i \rightarrow -\infty + \frac{\imath T}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (f_{-k} e^{-\imath \omega_k t_i} + f_k^* e^{\imath \omega_k t_i}) \\ \phi|_{T_f \rightarrow +\infty} &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (g_{-k} e^{-\imath \omega_k T_f} + g_k^* e^{\imath \omega_k T_f}). \end{aligned} \quad (45)$$

Подставляя (45) в (42) и (43), получаем

$$\begin{aligned} f_{-k} &= a_{-k} e^{\imath \omega_k \xi + \frac{\omega_k T}{2}}, \\ g_k^* &= b_k^*. \end{aligned} \quad (46)$$

Выражение для энергии в начальный момент времени будет иметь вид

$$E = \int dk \omega_k f_k^* f_k,$$

если

$$\xi = \frac{iT}{2}.$$

Тогда условия на амплитуды поля (46) принимают вид

$$\begin{aligned} f_{-k} &= a_{-k}, \\ g_k^* &= b_k^*. \end{aligned} \quad (47)$$

Таким образом, периодический инстантон и параметр $\xi = \frac{iT}{2}$ являются седловой точкой интеграла (40) при $a_k = f_k$ и $b_k^* = g_k^*$, которые, в свою очередь, определяются из граничных условий (45). С учетом нормировок начального и конечного состояния, получаем

$$\sigma_{E,f \rightarrow g} = |\mathcal{S}_E(g^*, f)|^2 = \exp(ET - S), \quad (48)$$

где S – действительная часть действия, вычисленная за один период инстантона. Можно показать ([8]), что найденная нами седловая точка будет также седловой точкой полной вероятности перехода

$$\sigma_E = \int \mathcal{D}a^* \mathcal{D}a \mathcal{D}b^* \mathcal{D}b \exp\left(-\int dk a_k^* a_k - \int dk b_k^* b_k\right) |\mathcal{S}_E(b^*, a)|^2. \quad (49)$$

Таким образом, в приближении седловой точкой

$$\sigma_E = \exp(ET - S)$$

Приложение В

Вычислим экспоненту подавления для критического пузыря. Так как критический пузырь является статическим решением уравнений поля, контуром $x_*(\tau)$ являются две прямые

$$|x| = x_0$$

Статическое решение периодически по времени с любым периодом, поэтому, для определенности, будем считать, что контур ограничен прямой $\tau = T$, $T > 0$, причем T конечно. Тогда несложное вычисление дает

$$\begin{aligned} S_E &= -(1+v) \int_0^{x_0} dx \dot{\phi} \Big|_{\tau(x)} - (1+v) \int_0^T d\tau \phi' \Big|_{x_0} - \epsilon \sigma_G = \\ &= T(1+v - 2\epsilon x_0) = T(1+v)(1 - (1+v)x_0) = T E_{sph}, \end{aligned} \quad (50)$$

и значит $\sigma_E = 1$.

Список литературы

- [1] B.V.Petukhov and V.L.Pokrovsky, Zh.Eksp.Teor.Fiz. 63, 634(1972)
- [2] B.I.Ivlev and Mel'nikov Phys. Rev. B 36, 6889 (1987)
- [3] S. Demidov and D. Levkov, Phys.Rev.Lett. 107, 071601 (2011)
- [4] V.A.Rubakov, D.T.Son and P.G.Tinyakov Phys.Lett. B 278 (1992) 279-283
- [5] A.Ringwald, Nucl.Phys. B330 (1990) 1
- [6] O.Espinosa, Nucl.Phys. B334 (1990) 310
- [7] G.'t Hooft, Phys.Rev.D14 (1976) 3432
- [8] Periodic instantons and scattering amplitudes - Khlebnikov, S.Yu. et al. Nucl.Phys. B367 (1991)
- [9] A.N.Kuznetsov and P.G.Tinyakov, Phys.Lett.B 406, 76 (1997)
- [10] C. Rebbi and R. J. Singleton, hep-ph/9706424
- [11] Coleman S. (1977) Phys.Rev.,D15, p.2929
- [12] В.А.Рубаков Классические калибровочные поля.