# $\boxed{\text{Лекция 6. AdS/CFT Correspondence}}$

$\boxed{\text{J. Polchinski: arXiv: 1010.6134}}$

$$AdS = CFT$$

$\boxed{D=5}$ $\boxed{D=4}$

IIB Superstring theory

$\mathcal{N}=4$ SYM

$A^a_\mu \in SU(N)$

$\underbrace{AdS_5 \times S_5}$

На самом деле $D=10$

$\boxed{\text{Параметры}}$

$\alpha'$, $\underbrace{l_{AdS}}$, $g_s$  $N$, $g_{YM}$ – Безразмерные

Имеет смысл (характерной длины струны)$^2$.

$$\frac{l_{AdS}}{l_{string}} = \frac{l_{AdS}}{\alpha'^{1/2}}$$

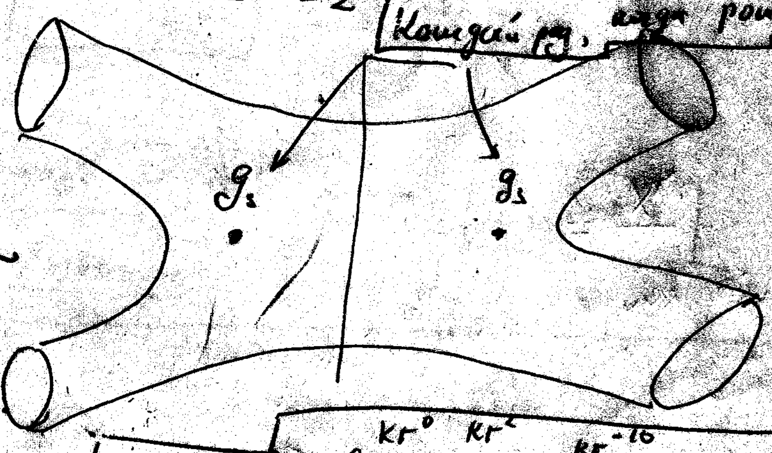
$\boxed{\text{Как определить массу Планка?}}$

$2 \to 1 \to 2$

Каждый раз, когда рождение/уничтожение струн

$g_s$ $g_s$

$g_s^2 \alpha'^4 \sim$



$=$

$\sim \frac{1}{M_{pl}}$

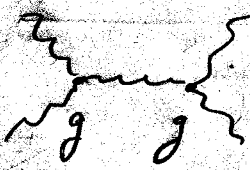
$$S_{GRA[illegible]} = \int \overbrace{\sqrt{-g}}^{kr^0}\, \overbrace{R}^{kr^2}\, \overbrace{d^{10}x}^{kr^{-10}} \cdot M_{pl}^8 \Rightarrow \text{[illegible]}$$

## Калибровочное поле

Никаких констант не содержит

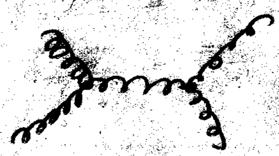
$$S_{SU(N)} = \frac{1}{g^2}\int d^4x\, F_{\mu\nu}^2$$

Константа связи



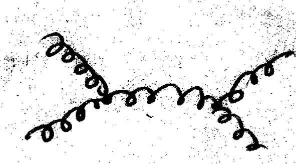

$\sim g^2$

$$S_{GRA,4D} = \frac{M_{Pl}^2}{2}\int d^4x\, R$$



$\sim \frac{1}{M_{Pl}^2}$

$\boxed{10D} \Rightarrow$



$\sim \frac{1}{M_{Pl}^8}$

---

Итак, $\boxed{g_s^2\,\alpha'^4 \sim \frac{1}{M_{Pl}^8}}$

$$\boxed{\frac{1}{M_{Pl}^8} = \frac{1}{2}(2\pi)^7 g_s^2 \alpha'^4}$$

Точный ответ

---

Соответствие

Приходит из теории струн

а) $\boxed{g_s = \frac{g_{YM}^2}{4\pi}}$ – Постулат 1

Свободные струны $\longleftrightarrow$ $\boxed{g_{YM} \to 0}$

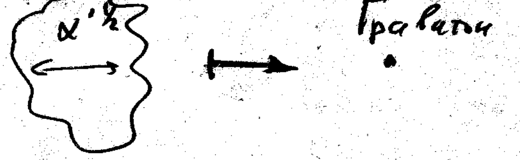
Слабо / связанные

б) $\boxed{\frac{L_{AdS}}{(\alpha')^{1/2}} = (g_{YM}^2 N)^{1/4} = \lambda^{1/4}}$ – Постул

$\lambda$ – Константа т'Хоофта

$(\alpha')^{1/2}$ – длина струн.

<u>Когда можно пренебречь размерами струн?</u>

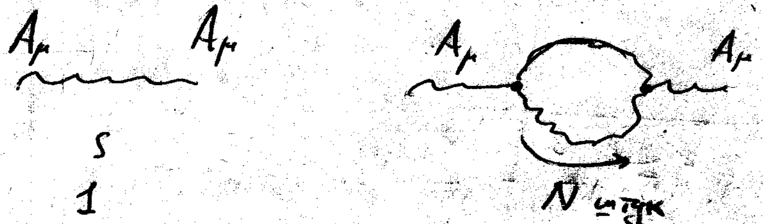



$$l_{AdS} \gg \alpha'^{1/2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{g_{YM}^2 N \gg 1}$$

<u>Что это значит: $g_{YM}^2 N \gg 1$?</u>




$\sim 1$ $\qquad\qquad \sim g_{YM}^2 N$

– $\boxed{\text{Это означает теорию в сильной связи!}}$

в) Догадаемся сами, как связан $M_{Pl}$ и параметры SYM

$$\frac{l_{AdS}}{l_{Pl}} = l_{AdS} \cdot M_{Pl} = \frac{l_{AdS}\, 2^{1/8}}{2^{3/8}\,\pi^{5/8}\, g_s^{1/4}\, \alpha'^{1/2}}$$

$$l_{AdS} \to \cancel{g_{YM}^{1/2}}\, N^{1/4} \qquad g_s^{1/4} \to \frac{\cancel{2^{1/8}}\,\cancel{\pi^{1/8}}}{\cancel{g_{YM}^{1/2}}}$$

$$= \frac{N^{1/4}}{2^{1/4}\,\pi^{5/8}}$$

$$\Downarrow$$

Гравитация классическая когда $l_{AdS} \ll M_{Pl}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{N \gg 1}$$

Классическая слабо связанная гравитация $\longleftrightarrow$ $\lambda_{t'Hooft} = g^2_{YM} N \gg 1$

$g_s = \frac{g^2_{YM}}{4\pi} \ll 1$

$N \gg 1$

II

Соответствие между

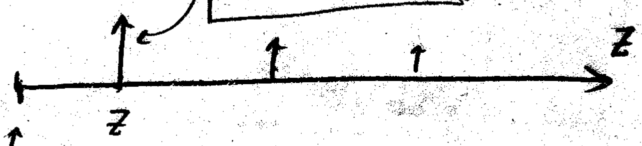
Супергравитория в $AdS_5 \times S_5$ | Сильно-связанной SYM $SU(N)$ $\mathcal{N}=4$

Мы будем выяснять, что чему соответствует!

# Пространство AdS

$$\boxed{ds^2 = L^2_{AdS}\left(\frac{-dz^2 + \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}{z^2}\right)}$$

$$\boxed{l = \frac{L^2}{z^2}\, l_0^2}$$



$$\boxed{l_0 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$$

$z=0$ Сингулярность $\leftrightarrow$ Граница AdS

Почему такое пространство? Оно - масштабно - инвариантно!

$$\boxed{\begin{aligned} x^\mu &\mapsto \lambda x^\mu \\ z &\mapsto \lambda z \end{aligned}} \qquad \boxed{ds^2 \mapsto ds^2}$$

Но масштабные преобразования - лишь часть конформной алгебры

Верно ли остальное?

Сдвиги: $x^\mu \mapsto x^\mu + a^\mu$, $z \mapsto z$ — ok

Повороты: $x^\mu \mapsto \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, $z \mapsto z$ — ok

Метрика содержит $(dx^\mu)^2$

Специальные конформные: $\dfrac{x'^\mu}{|x'|^2} = \dfrac{x^\mu}{|x|^2} + b^\mu$.

$\eta^{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu$ - ?

## Специальные конформные преобразования

$$\boxed{\begin{aligned} X^\mu &\mapsto \frac{X^\mu}{X^2+Z^2} \\ Z &\mapsto \frac{Z}{X^2+Z^2} \end{aligned}}$$

– **Инверсия**

$$\boxed{X^A \mapsto \frac{X^A}{(X^A)^2}}$$

$$dX^\mu \mapsto \frac{dX^\mu}{X^2+Z^2} - \frac{2X^\mu dX^\mu + 2Z dZ}{(X^2+Z^2)^2}$$

$$(dX^A)^2 \mapsto \left(\frac{dX^A}{(X^A)^2} - \frac{2X^B dX^B X^A}{(X^A)^4}\right)^2 = \frac{(dX^A)^2}{(X^A)^4} - \frac{4(X^A dX^A)^2}{(X^A)^6} + \frac{4(X^A)^2(X^B dX^B)^2}{(X^A)^8}$$

---

## Пространство AdS как гиперболоид

$\cancel{ds^2 = V^2(\eta_{ab}\, dX^a dX^b + dV dV)}$

$$\boxed{A, B = 0, 1, \dots, D, D+1}$$

$$\boxed{ds^2 = L^2 \eta_{AB}\, dX^A dX^B}$$

$$\boxed{\eta_{AB} X^A X^B = -1}$$

$$\boxed{\eta_{AB} = (+1, \dots, +1, -1)}$$

Инвариантный гиперболоид

Симметрия Лоренца: $\boxed{SO(1, D+1)}$ — **Как гр. конформной группы в D-мерном!**

$$\boxed{\begin{aligned} U &= X^D - X^{D+1} \\ V &= X^D + X^{D+1} \end{aligned}}$$

$$\eta_{\mu 0} X^\mu X^0 + UV = -1 \Rightarrow \boxed{V = -\frac{1}{U} - \frac{(X^\mu)^2}{U}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} z &= \frac{1}{U} \\ x^\mu &= \frac{X^\mu}{U} \end{aligned}}$$

$$(dx^\mu)^2 + dz^2 = \left(\frac{dX^\mu}{U} - \frac{X^\mu}{U^2} dU\right)^2 + \frac{dU^2}{U^4} =$$

$$= \frac{(dX^\mu)^2}{U^2} - \frac{2(X^\mu dX^\mu) dU}{U^3} + \frac{dU^2}{U^4} +$$

$$+ \frac{(X^\mu)^2}{U^4} dU^2 + \cancel{\phantom{xx}}$$

$$= \frac{1}{U^2} dU dV + \frac{(dX^\mu)^2}{U^2}$$

$$dU dV = (dX^D - dX^{D+1})(dX^D + dX^{D+1}) = (dX^D)^2 - (dX^{D+1})^2 =$$

$$= dU \left( \left(\frac{1}{U^2} dU\right) + \left(\frac{(X^\mu)^2}{U^2} dU\right) - \frac{2 X^\mu dX^\mu}{U} \right.$$

$$\boxed{ds^2 = \frac{1}{z^2}\left((dx^\mu)^2 + dz^2\right)}$$

$\boxed{\text{Ещё один способ увидеть, что теория будет конформная на границе}}$

SUGRA имеет массовые параметры $\begin{pmatrix} l_{AdS} \\ l_{pl} \end{pmatrix}$

Куда они делись?

Но метрика не продолжается на границу!

$$ds^2 \Big|_{z \to 0} \longmapsto \infty$$

Можно определить "метрику" $d\bar{s}^2 = f^2(z) ds^2$

Любая ф-ция, удовлетворяющая

$$f(0, x) = 0$$

$$\boxed{d\bar{s}^2\Big|_{z=0} = (dx^\mu)^2 \partial_z f \Big|_{f=0}}$$

Эта метрика конформна/интересна, т.к. ф-ция $f$ - неизвестна.

$\boxed{f \to \Omega \tilde{f}}$ - тоже подходит

$\boxed{d\bar{s}^2 \mapsto \Omega^2 d\bar{s}^2}$

Выбор ф-ции $f$ соответствует конформному преобразованию метрики

## Как может выглядеть AdS/CFT соответствие?

Классические решения $\longleftrightarrow$ Корреляторы в CFT

$$\Phi(x,z) \longleftrightarrow \langle O(x_1)\dots O(x_n)\rangle$$

$\uparrow$ ($z\mapsto 0$, CFT на границе)

$\uparrow$ здесь нет $z$

---

$\boxed{\text{Классическое скалярное поле в AdS}}$ $\boxed{L_{AdS}=1}$

$$\boxed{S_{bulk} = +\frac{1}{2}\int d^5x\,\sqrt{g}\left(g^{AB}\partial_A\phi\,\partial_B\phi + m^2\phi^2\right)}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_A\left(g^{AB}\partial_B\phi\sqrt{-g}\right) + m^2\phi = 0$$

$$-\cancel{z^5}\,\partial_\mu\left(\frac{z^2}{\cancel{z^5}}\partial_\mu\phi\right) - z^5\partial_z\left(\frac{z^2}{z^5}\partial_z\phi\right) + m^2\phi = 0$$

$$\boxed{ds^2 = \frac{(dx^\mu)^2 + dz^2}{z^2}} \qquad \boxed{-z^2\partial_\mu^2\phi - z^5\partial_z\left(\frac{\partial_z\phi}{z^3}\right) + m^2\phi = 0}$$

Понятно, что нам нужны убывающие решения:

$$\boxed{\phi \mapsto 0 \quad \text{при} \quad z\mapsto\infty}$$

$\swarrow$

Найдём поведение решения вблизи границы.

$$\boxed{\Phi = z^{\Delta}\,\bar{\Phi}_0(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{O(z^{2+\Delta})} - z^5\,\partial_z\left(\Delta z^{\Delta-4}\right) + m^2 z^{\Delta} = 0$$

Член с пространственными производными выпадает!

$$\boxed{\Delta(\Delta-4) = m^2}$$

$$\Delta_\pm = \frac{1}{2}\left(4 \pm \sqrt{16+4m^2}\right) =$$

$$\boxed{\Delta_\pm = 2 \pm \sqrt{m^2+4}} \longleftarrow \boxed{L_{AdS} = 1}$$

---

$\boxed{m^2 \geq -4}$ - Условие стабильности скалярного поля в пространстве AdS (Breitenlohner - Freedman bound)

Мы привыкли, что $m^2 \geq 0$, но в пространстве AdS кривизна исправляет это дело!

---

Скалярное произведение - Конвергентность

$$(\Phi_1\, \Phi_2) = \int d^5x \sqrt{-g}\; \Phi_1^* \Phi_2 =$$

$$= \int dz\, d^4x\, \frac{1}{z^5}\, z^{2\Delta} |\bar{\Phi}|^2 \longleftarrow \text{сходится при } 2\Delta - 5 > -1$$

$$\Downarrow \qquad \boxed{\Delta > 2}$$

Мода с $\Delta = \Delta_+$ называется нормируемой

Мода с $\Delta = \Delta_-$ называется ненормируемой.

$\boxed{\Delta = \Delta_+}$

$\boxed{\Delta_- = 4-\Delta}$

$\boxed{\Delta < 4}$ – Обе моды (нормируемая и ненормируемая). исчезают на границе

Общее решения уравнения Клейна-Гордона ~~[illegible]~~ удовлетворяет

$$\boxed{\phi \to z^{4-\Delta} J\bar{\phi}(x)}$$ при $z \to 0$.

$\Downarrow$

Задав $\bar{\phi}(x)$ на границе, мы фиксируем 1 граничное условие

$\phi \mapsto 0$ при $z \to \infty$

$\Downarrow$

$\phi(z,x)$ находится однозначно. Это – функционал от $J\bar{\phi}(x)$

$$\boxed{\bar{\phi}(z,x) = \frac{(\Delta-1)(\Delta-2)}{\pi^2}\int d^4y \left[\frac{z}{z^2+(x-y)^2}\right]^{\Delta} \bar{J}(y)}$$

Пропагатор из балка на границу

$$\frac{1}{z^3}\partial_z\left(\frac{z^{\Delta}}{(z^2+(x-y)^2)^{\Delta}}\right) = \frac{\Delta z^{(\Delta-4)}}{(z^2+(x-y)^2)^{\Delta}} - \frac{2\Delta z^{\Delta-2}}{(z^2+(x-y)^2)^{\Delta+1}}$$

$$z^5\partial_z\left(\frac{1}{z^3}\partial_z\left(\frac{z^{\Delta}}{(z^2+(x-y)^2)^{\Delta}}\right)\right) = \frac{\Delta(\Delta-4)z^{\Delta-\cancel{4}}}{(z^2+(x-y)^2)^{\Delta}} - \cancel{\frac{2\Delta^2 z^{\Delta-\cancel{4}+2}}{(z^2+(x-y)^2)^{\Delta+1}}} - \frac{2(\Delta-2)\Delta z^{\Delta-\cancel{4}+2}}{(z^2+(x-y)^2)^{\Delta+1}} + \frac{4z^{\Delta-\cancel{1}+4}}{(z^2+(x-y)^2)^{\Delta+2}}\Delta(\Delta+1)$$

$$\partial_\mu \left(\frac{z^\Delta}{(z^2+(x-y)^2)^\Delta}\right) = \frac{-2\Delta(x_\mu - y_\mu) z^\Delta}{(z^2+(x-y)^2)^{\Delta+1}}$$

$$z^2 \partial_\mu^2 \left(\frac{z^\Delta}{(z^2+(x-y)^2)^\Delta}\right) = \cancel{-\frac{8\Delta z^{\Delta+2}}{(z^2+(x-y)^2)^{\Delta+1}}} + \frac{4\Delta \cdot \cancel{(x-y)^2}\, z^{\Delta+2}(\Delta+1)}{(z^2+(x-y)^2)^{\Delta+1}}$$

$$- \frac{4\Delta(\Delta+1) z^{\Delta+4}}{(z^2+(x-y)^2)^{\Delta+2}}$$

$$z^5 \partial_z\left(\frac{1}{z^3}\partial_z \phi\right) + z^2 \partial_\mu^2 \phi = \cancel{\frac{\Delta(\Delta-4) z^\Delta}{(z^2+(x-y)^2)^\Delta}} - \cancel{\frac{4(\Delta-1) z^{\Delta+2}}{(z^2+(x-y)^2)^{\Delta+1}}} +$$

$$+ 4 \cancel{\frac{z^{\Delta+4}\,\Delta(\Delta+1)}{(z^2+(x-y)^2)^{\Delta+2}}} + \cancel{\frac{4 z^{\Delta+2}(\Delta-1)}{(z^2+(x-y)^2)^{\Delta+1}}} - \cancel{\frac{4\Delta(\Delta+1) z^{\Delta+4}}{(z^2+(x-y)^2)^{\Delta+2}}} =$$

$$= \cancel{m^2 \frac{z^\Delta}{(z^2+(x-y)^2)^\Delta}} \qquad ok$$

$$\boxed{\lim_{z\to 0} \frac{z^{2\Delta-4}}{(z^2+x^2)^\Delta} = \frac{\pi^2}{(\Delta-1)(\Delta-2)}\,\delta(x)}$$

$\boxed{\text{Ширина ф-ции} \to 0}$

$$\int_0^\infty \cancel{d^4x} \frac{z^{2\Delta-4}}{(z^2+x^2)^\Delta} \, 2\pi^2 \frac{x^3 dx^2}{2} =$$

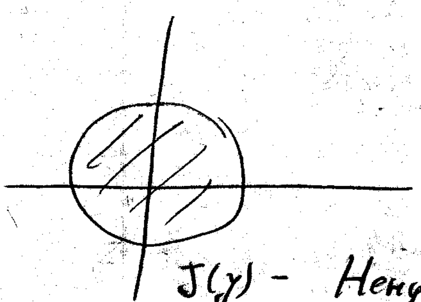
$$= \{y = x^2\} = \pi^2 \frac{1}{2} z^{2\Delta-4} \int_0^\infty y\,dy\, \frac{\ldots}{\ldots}$$

$$= -\frac{1}{2}\pi^2\int_0^\infty \frac{y'}{(\Delta-1)}\, d\left(\frac{1}{(y'+1)^{\Delta-1}}\right) = -\frac{\pi^2}{2}\,\frac{1}{(\Delta-1)}\,\cancel{\frac{y'}{(y'+1)^{\Delta-1}}\Big|_0^\infty} \to 0 \;+$$

$$+\pi^2\,\frac{1}{2}\boxed{\int_0^\infty \frac{dy'}{(y'+1)^{\Delta-1}}}\,\frac{1}{\Delta-1} = \frac{\pi^2}{2(\Delta-1)(\Delta-2)} \quad \text{ok}$$

$$+\frac{1}{\Delta-2}\boxed{\frac{1}{(y'+1)^{\Delta-2}}\Big|_0^\infty} \to 1$$

---



В не этой области

$\Phi \sim z^\Delta$ при $z \to 0$.

$J(y)$ - Ненулевое в некоторой области

$$S[\Phi] = \frac{1}{2}\int_{z>\epsilon} dz\, d^4x\, \sqrt{-g}\left(g^{AB}\partial_A\phi\,\partial_B\phi + m^2\phi^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{z>\epsilon} dz\, d^4x\, \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_A\left(g^{AB}\partial_B\phi\sqrt{-g}\right) + m^2\phi^2\right) \to 0$$

$$-\frac{1}{2}\int_{z=\epsilon} d^4x\,\sqrt{-g}\; g^{zB}\,\Phi\,\partial_B\Phi =$$

---

$$\cancel{= -\frac{1}{2}\,\frac{\epsilon^{1-\Delta}}{\epsilon^3}\int d^4x\; \partial_z\phi(x)\Big|_{z=\epsilon}\,\phi(x)}$$

$$\epsilon^{-\Delta+3} \qquad \epsilon^{-\Delta+3}$$

---

$$\cancel{\partial_z\Phi\Big|_{z=\epsilon} = \frac{(\Delta-1)(\Delta-2)}{\pi^2}\int d^4y\;\phi(y)\left\{\frac{\Delta z^{\Delta-1}}{\left(z^2+(x-y)^2\right)^{\Delta}} - \dots\right\} =}$$

$$\cancel{\epsilon^{-\Delta+3}\;\;\Delta\,\pi^2\,\delta(x-y)}$$

$$\boxed{\text{Убираем расходящийся кусок}}$$

$$\boxed{S_{ren} = S_0[\bar\Phi] + S_{ct}[\Phi]}$$ Локальный добавок

$$= \delta g \int \bar\Phi^2 d^4x$$

---

$$\Phi(x,z) \mapsto \underbrace{\bar\Phi z^{4-\Delta}}_{\boxed{\text{Локальный член}}} + \underbrace{z^{\Delta}\frac{(\Delta-1)(\Delta-2)}{\pi^2}\int d^4y \frac{1}{(x-y)^{2\Delta}}\bar\Phi(y)}_{\text{Нелокальный член}}$$

$\boxed{\text{при } z \mapsto 0}$

$$\partial_z \Phi(x,z) = (4-\Delta)\bar\Phi z^{3-\Delta} + z^{\Delta-1}\Delta\frac{(\Delta-1)(\Delta-2)}{\pi^2}\int d^4y \frac{\bar\Phi(y)}{(x-y)^{2\Delta}}$$

$$S = -\tfrac{1}{2}\,\cancel{\epsilon^{-3}}\,\cancel{\epsilon^{2}}\int d^4x \Big\{(4-\Delta)\,\epsilon^{\overset{4-2\Delta}{\cancel{3-\Delta+4-\Delta}}}\,\bar\Phi^2$$

$$+ \bar\Phi(x)\,\cancel{\epsilon^{4-\Delta}}\,\cancel{\epsilon^{\Delta-1}}\,\frac{\Delta(\Delta-1)(\Delta-2)}{\pi^2}\int d^4y \frac{\bar\Phi(y)}{(x-y)^{2\Delta}}$$

$$+ (4-\Delta)\bar\Phi(x)\,\cancel{\epsilon^{3-\Delta}}\,\cancel{\epsilon^{\Delta}}\,\frac{(\Delta-1)(\Delta-2)}{\pi^2}\int d^4y \frac{\bar\Phi(y)}{(x-y)^{2\Delta}}$$

$$+ \epsilon^{\overset{2\Delta-4}{\cancel{2\Delta-1}}}\,\frac{\Delta(\Delta-1)^2(\Delta-2)^2}{\pi^4}\left(\int d^4y \frac{\bar\Phi(y)}{(x-y)^{2\Delta}}\right)^2\Big\}$$

$$\Delta > 2 \Rightarrow \epsilon^{2\Delta-4} \mapsto 0$$

$$\epsilon^{4-2\Delta} \mapsto \infty$$

$$\boxed{S = -\tfrac{1}{2}(4-\Delta)\,\epsilon^{4-2\Delta}\int d^4x\,\bar{\phi}^2 + 2\,\frac{(\Delta-1)(\Delta-2)}{\pi^2}\int d^4x\,d^4y\,\frac{\bar{\phi}(x)\bar{\phi}(y)}{(x-y)^{2\Delta}}}$$

Контактный [illegible] член. [illegible] перенормировкой

$\Downarrow$

**Правильная структура эффективного действия!**

**Предположения:**

(а) Фиксируем $\phi \to \bar{\phi} Z^{4-\Delta}$ при $Z \to 0$

(б) ~~Восстановим~~ Находим решение

(в) Вычисляем действие

(г) Интерпретируем действие как производящий функционал для ф-ций Грина.