$\boxed{\text{CFT}}$ $\boxed{\text{Лекция 2}}$

$\boxed{\text{CFT в } D \geq 3}$ $\boxed{\text{Quantum Case}}$

$$\boxed{\underbrace{\langle \phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\rangle}_{\text{Квази-примарные поля.}} = \frac{1}{Z}\int \underbrace{\mathcal{D}\Phi}_{\text{Все независимые поля}}\, \phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\, e^{-S}}$$

S — Конформно инвариантное действие.

<u>Поле</u>
- $\varphi(x,t)$ — фундаментальное поле
- $\varphi^2 = \phi(x,t)$, $\partial_\mu \varphi = B_\mu$ — Композитное поле

$\boxed{\text{Поля}} \equiv$ Локальные величины.

В CFT все поля рассматриваются как равноправные.

Как много фундаментальных полей в теории? — Нет ответа.

$\boxed{[\mathcal{D}\phi] \text{ — Инвариантно} \Rightarrow \text{CFT в квантовом случае (Нетривиальное свойство.)}}$

$$\langle \phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\phi'\, e^{-S[\phi']}\, \underbrace{\phi_1(x_1)}_{\phi_1'(x_1')\left|\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\right|^{\Delta/D}}\, \phi_2(x_2)$$

$$\boxed{\phi'(x') = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{-\Delta/D}\phi(x)}$$

$$\langle \phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\rangle = \langle \phi_1'(x_1')\,\phi_2'(x_2')\rangle \left|\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\right|^{\Delta_1/D}\left|\frac{\partial x_2'}{\partial x_2}\right|^{\Delta_2/D}$$

Rotation: $\langle \phi_1(x_1)\, \phi_2(x_2) \rangle = f(|x_1 - x_2|)$

$\forall$

$$f(|x_1 - x_2|) = f(|x_1' - x_2'|) \left|\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\right|^{\Delta_1/D} \left|\frac{\partial x_2'}{\partial x_2}\right|^{\Delta_2/D}$$

$$\boxed{x_1' = \lambda x_1}$$

$$f(r) = f(\lambda r)\, \lambda^{\Delta_1 + \Delta_2} \Rightarrow f = \frac{f_0}{r^{\Delta_1 + \Delta_2}}$$

Остались специальные конформные:

$$\boxed{x'^\mu = \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1 - 2(bx) + b^2 x^2}} \qquad (x'^\mu)^2 = \frac{\cancel{x^2 - 2(bx)x^2 + b^2 x^2 x^2}}{(1 - 2(bx) + b^2x^2)^{\cancel{2}}}\, x^2$$

Вычислим $\dfrac{\partial x'}{\partial x}$

(i) $x'^\mu = \dfrac{x^\mu}{x^2} - b^\mu$

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\delta^\mu_\nu}{x^2} - \frac{x^\mu}{x^4} 2x^\nu$$

$$\det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) = \frac{1}{x^2}\begin{pmatrix} \cancel{x^2} - \cancel{2}x^2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{r^{2D}}$$

$x = (r, 0, 0, 0)$

(ii) $x''^\mu = \dfrac{x'^\mu}{x'^2} \Rightarrow \det\left(\dfrac{\partial x''^\mu}{\partial x'^\nu}\right) = \dfrac{1}{r'^{2D}}$

$$\det\left(\frac{\partial x''^\mu}{\partial x^\nu}\right) = \frac{1}{r^{2D}\, r'^{2D}} = \frac{1}{\cancel{r^{2D}}} \frac{\cancel{x^{2D}}}{(1 - 2(bx) + b^2x^2)^D}$$

$$\boxed{\det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) = \frac{1}{\left(1-2(bx)+b^2x^2\right)^D}}$$

$$\underbrace{f(|x_1-x_2|)}_{\parallel} = \underbrace{f(|x_1'-x_2'|)}_{\parallel}\frac{1}{\left(1-2(bx_1)+b^2x_1^2\right)^{\Delta_1}}\frac{1}{\left(1-2(bx_2)+b^2x_2^2\right)^{\Delta_2}}$$

$$\frac{f_0}{|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} \qquad \frac{f_0}{|x_1'-x_2'|^{\Delta_1+\Delta_2}}$$

$$\boxed{\gamma_i = 1-2(bx_i)+b^2x_i^2}$$

$$\boxed{x_2=0} \Rightarrow |x_1'|^2 = \frac{x_1^2}{\gamma_1}$$

$$\frac{1}{|x_1|^{\Delta_1+\Delta_2}} = \frac{1}{|x_1|^{\Delta_1+\Delta_2}}\frac{\gamma_1^{-\frac{\Delta_1}{2}+\frac{\Delta_2}{2}}}{\gamma_1^{\Delta_1}\cancel{\gamma_2^{\Delta_2}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\gamma_1^{\frac{\Delta_2-\Delta_1}{2}}=0} \quad \forall x_1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta_1=\Delta_2}$$

<u>Итак</u>

$$\boxed{\langle \Phi_1(x_1)\,\Phi_2(x_2)\rangle = \begin{cases} \dfrac{C_{12}}{|x_1-x_2|^{2\Delta_1}}, & \Delta_1=\Delta_2 \\ 0, & \Delta_1\neq\Delta_2 \end{cases}}$$

$\boxed{\text{Д/З}}$ Проверить, что теперь специальные конформные преобразования — симметрия $\forall x_2$

$\boxed{\text{P}}$ $$|x_1'-x_2'|^2 = x_1'^2 - 2(x_1'x_2') + x_2'^2 =$$

$$= \frac{x_1^2}{\gamma_1} + \frac{x_2^2}{\gamma_2} - 2(x_1'x_2')$$

$$(x_1' x_2') = \frac{(x_1^\mu - b^\mu x_1^2)\,(x_2^\mu - b^\mu x_2^2)}{\gamma_1 \gamma_2} =$$

$$= \frac{(x_1 x_2 - (b x_2)\, x_1^2 - (b x_1) x_2^2 + b^2 x_1^2 x_2^2)}{\gamma_1 \gamma_2}$$

$$|x_1' - x_2'|^2 = \frac{x_1^2 \gamma_2 + x_2^2 \gamma_1 - 2(x_1 x_2) + \cancel{2 x_1^2 (b x_2)} + \cancel{2 x_2^2 (b x_1)} \cancel{- 2 b^2 x_1^2 x_2^2}}{\gamma_1 \gamma_2}$$

$$x_1^2 \left(1 - \cancel{2(b x_2)} + \cancel{b^2 x_2^2}\right) + x_2^2 \left(1 - \cancel{2(b x_1)} + \cancel{b^2 x_1^2}\right)$$

$$= \frac{|x_1 - x_2|^2}{\gamma_1 \gamma_2}$$

$$\boxed{|x_1' - x_2'|^2 = \frac{|x_1 - x_2|^2}{\gamma_1 \gamma_2}}$$

$$\frac{f_0}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} = \frac{f_0}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} \frac{\cancel{(\gamma_1 \gamma_2)^{+\Delta_1/2 + \Delta_2/2}}}{\cancel{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2}}} \gamma_1^{\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2}} \gamma_2^{\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta_1 = \Delta_2}$$

Ok

Определение Δ — Конформная размерность оператора

$\boxed{\varnothing/3}$ Трёхточечная функция

$$\boxed{\langle \phi_1(x_1)\, \phi_2(x_2)\, \phi_3(x_3) \rangle = \sum \frac{C_{123}^{(abc)}}{x_{12}^{a}\, x_{23}^{b}\, x_{31}^{c}}}$$

$x_{12} = |x_1 - x_2|$ $\qquad$ $\boxed{a+b+c = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}$

$\boxed{P}$

$$\Rightarrow \langle \Phi_1(x_1)\, \Phi_2(x_2)\, \Phi_3(x_2) \rangle =$$

$$= f(x_1 - x_2,\; x_2 - x_3,\; \cancel{x_1 - x_3})$$

Трансляции

$$\parallel$$

Сферическая симметрия $\Rightarrow f(r_{12},\, r_{23},\, \underbrace{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)}_{\text{Вместо этого } r_{13}})$

$$r_{13}^2 = r_{12}^2 + r_{23}^2 + 2(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)$$

Симметрия $x \to \lambda x$ $\Rightarrow \langle\ \rangle \propto \dfrac{1}{r_{12}^{a}\, r_{23}^{b}\, r_{13}^{c}}$

$$\boxed{a+b+c = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}$$

Специальные конформные $\Rightarrow$

$$\frac{1}{r_{12}^{a}\, r_{13}^{b}\, r_{13}^{c}} = \frac{1}{\gamma_1^{\Delta_1}\gamma_2^{\Delta_2}\gamma_3^{\Delta_3}}\; \frac{(\gamma_1\gamma_2)^{a/2}\,(\gamma_2\gamma_3)^{b/2}\,(\gamma_1\gamma_3)^{c/2}}{r^{a}\, r^{b}\, r^{c}}$$

$\Downarrow$

$$\gamma_1^{\Delta_1 - \frac{a+c}{2}} \; \gamma_2^{\Delta_2 - \frac{a+b}{2}} \; \gamma_3^{\Delta_3 - \frac{b+c}{2}} = 1$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} a+c = 2\Delta_1 \\ a+b = 2\Delta_2 \\ b+c = 2\Delta_3 \end{cases} \qquad 2a = 2\Delta_1 + 2\Delta_2 - 2\Delta_3$$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 \\ b &= \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1 \\ c &= \Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2 \end{aligned}}$$

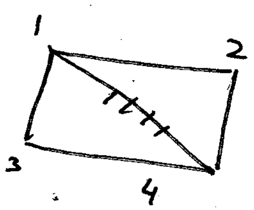
$$\boxed{\langle \phi_1(x_1)\, \phi_2(x_2)\, \phi_3(x_3) \rangle = \cancel{A}\, \frac{C_{123}}{x_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}\, x_{13}^{\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2}\, x_{23}^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}}}$$

$\Downarrow$

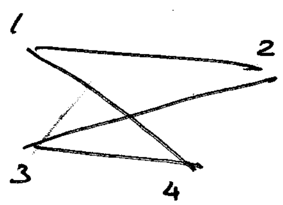
2-х точка и 3-х точка определены с точностью до мультипликативных констант

Д/з Доказать, что величина

а) $\dfrac{x_{12}\, x_{34}}{x_{13}\, x_{24}}$



б) $\dfrac{x_{12}\, x_{34}}{x_{23}\, x_{14}}$



} Конформные инварианты

P D, Повороты, трансляции – Очевидно

Специальные конформные

$$\frac{x_{12}' x_{34}'}{x_{13}' x_{24}'} \to \frac{x_{12} x_{34}}{x_{13} x_{24}} \frac{(\gamma_1 \gamma_3 \gamma_2 \gamma_4)^{1/2}}{(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4)^{1/2}} \quad \text{ok}$$

$$\boxed{\langle \phi_1(x_1)\, \phi_2(x_2)\, \phi_3(x_3)\, \phi_4(x_4) \rangle = f\left(\frac{x_{12} x_{24}}{x_{13} x_{24}}, \frac{x_{12} x_{34}}{x_{23} x_{14}}\right) \prod x_{ji}^{\Delta/3 - \Delta_i - \Delta_j}}$$

$$\boxed{\Delta = \sum \Delta_k}$$

Тождества Уорда

$$\langle X \rangle = \frac{1}{Z} \int [\mathcal{D}\Phi]\, X\, e^{-S}$$

$$\boxed{\phi'(x) = \phi(x) - i\omega_a G_a \phi} \qquad X'$$

$$\boxed{S' = S + \int dx\, \partial_\mu j^\mu_a \omega^a(x)} \longleftrightarrow S \text{ с заменённым } \Phi$$

$$\langle X \rangle = \frac{1}{Z} \int [\mathcal{D}\phi']\, \underbrace{X[\phi']}_{\substack{\parallel \\ X[\phi] + \delta X}}\, e^{-S[\Phi']}$$

$$= \frac{1}{Z} \int \underbrace{[\mathcal{D}\Phi']}\, e^{-S[\Phi]} \left(-X \int \partial_\mu j^\mu_a \omega_a + \delta X\right)$$

Предположим, что мера инвариантна относительно локального преобразования.

$$\cancel{\ldots}\int dx\, \boxed{\partial_\mu \langle j_a^{\mu}(x) X \rangle \omega_a = \langle \delta X \rangle}$$

Тождество Уорда

$$\boxed{X = \phi(x_1) \ldots \phi(x_n)}$$

$$\delta X = -i \sum_i \phi(x_1)\, G_a \phi(x_i) \ldots \phi(x_n)\, \omega_i$$

$$\boxed{\partial_\mu \langle j_a^{\mu}(x)\ \phi(x_1) \ldots \phi(x_n) \rangle = -i \sum \delta(x-x_i) \langle \phi(x_1) \ldots G_a \phi(x_i) \ldots \phi}$$

$\boxed{\text{ТЭИ}}$

$$\partial_\mu \langle T^{\mu}{}_{\nu}(x)\ \phi(x_1) \ldots \phi(x_n) \rangle = -i \sum \delta(x-x_i) \langle \phi(x_1) \ldots \underbrace{P \phi(x_i)}_{+i\frac{\partial}{\partial x_i^\mu}} \ldots \rangle$$

$$= -\sum_i \delta(x-x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \phi(x_1) \ldots \phi(x_n) \rangle$$

$\boxed{\text{Дилатонный ток}}$ $\boxed{j_D^{\mu} = T^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}}$

$$\partial_\mu \langle T^{\mu}{}_{\nu}(x) x^{\nu}\ \phi(x_1) \ldots \phi(x_n) \rangle =$$

$$= -i \sum \delta(x_1 - x_i) \langle \phi(x_1) \ldots \left(+i x_i^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_i^{\alpha}} + i \Delta_i \right) \phi(x_i) \ldots \rangle$$

$$= - \sum \delta(x-x_i) \left(x_i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \langle \phi(x_1) \ldots \phi(x_n) \rangle$$

$$- \sum \delta(x-x_i)\, \Delta_i \langle \phi(x_1) \ldots \phi(x_n) \rangle$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\langle T^{\mu}{}_{\mu}\ \phi(x_1) \ldots \phi(x_n) \rangle = - \sum_i \delta(x-x_i)\, \Delta_i \langle \phi(x_1) \ldots \phi(x_n) \rangle}$$