CFT | Лекция 1 | План лекции

50% задач = экзамен

Семинар предлагается устроить после лекции.

① Зачем нужна CFT?

② Пример Конформной симметрии.

$$S = -\tfrac{1}{2}\int d^2x\, (\partial_\mu X)^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x - t \\ v &= x + t \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} \partial_x &= \partial_u + \partial_v \\ \partial_t &= -\partial_u + \partial_v \end{aligned} \;\Rightarrow\; +(\partial_\mu X)^2 = -(\partial_t X)^2 + (\partial_x X)^2 =$$

$$= -(\partial_u X - \partial_v X)^2 + (\partial_u X + \partial_v X)^2$$

$$= 4\,\partial_u X\, \partial_v X$$

$$\left| \begin{aligned} x &= \frac{u+v}{2} \\ t &= \frac{u-v}{2} \end{aligned} \right|$$

$$d^2x = \underbrace{\left| \det\left(\frac{\partial(x^0, x^1)}{\partial(u,v)}\right)\right|}_{1/2} du\, dv$$

$$ds^2 = (dx^0)^2 +$$

$$\boxed{S = \int du\, dv\, \partial_u X\, \partial_v X}$$

Симметрия: $\boxed{\begin{aligned} u' &= u'(u) \\ v' &= v'(v) \end{aligned}}$ Калибровочная симметрия.

Что это за симметрия? ~~…~~ Это – общекоординатные преобразования.

~~…~~

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 = -\tfrac{1}{4}(du - dv)^2 + \tfrac{1}{4}(du + dv)^2$$

$$ds'^2 = du'dv' \,\Pi^2 = \Pi^2 \frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} du\, dv$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{\Pi^2 = \left[\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v}\right]^{-1}}$$

Мы видим, что $g'_{\mu\nu} \Longrightarrow \Pi^2 \eta_{\mu\nu}$

Это означает, что углы между векторами $\overbrace{\text{с одинаковыми координатами}}$ не меняются.

$$\angle(A', B')_{g'} = \frac{A'_\mu B'^\mu}{\sqrt{A'^2_\mu}\sqrt{B'^2_\mu}} \longrightarrow \frac{\cancel{\Pi^2}(AB)}{\cancel{\Pi^2}\sqrt{A^2}\sqrt{B^2}} = \underset{\text{const}}{[\text{illegible}]}.$$

Преобразование, не меняющее углы, называется конформным

Перейдём в Евклид: $\boxed{t = -i\tau}$ $\begin{bmatrix} u = x + i\tau \equiv z \\ v = x - i\tau \equiv \bar{z} \end{bmatrix}$

Наши преобразования в Евклиде: $\begin{bmatrix} z' = z'(z) \\ \bar{z}' = \bar{z}'(\bar{z}) \end{bmatrix}$ ТФКП

Конформные преобразования

---

③ Простой вывод: $g'_{\mu\nu} = \Pi^2 \eta_{\mu\nu}$ ← Конформная симметрия по определению

$$\Pi^2 = 1 + 2f$$

$$\Downarrow$$

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = 2f\eta_{\mu\nu}$$

$\partial_\mu \partial_\nu \times \mapsto \cancel{2}\partial^2 \partial\xi = \cancel{2}\partial^2 f \Longleftrightarrow \partial^2(\partial\xi) = \frac{1}{D}(\partial^2 \partial\xi)$

$\eta_{\mu\nu} \times \Rightarrow \cancel{2}Df = \cancel{2}(\partial\xi) \Rightarrow f = \frac{1}{D}(\partial\xi)$

ξ второго порядка

$\xi_\mu = A_\mu + B_{\mu\nu} x^\nu + C_{\mu\nu\beta} x^\nu x^\beta \Leftarrow \partial^2(\partial\xi) = 0 \Rightarrow \boxed{f = B_\nu x^\nu \ldots}$

③ Честный вывод конформной симметрии.

④ Алгебра Пуанкаре – Минковское.

⑤ Выпишем коммутационные соотношения для конформной алгебры.
Задача: Вывести, → $\begin{bmatrix} SO(D+1,1) \longleftrightarrow \text{Евклид} \\ SO(D,2) \longleftrightarrow \text{Минковский} \end{bmatrix}$

⑥ Представления $\underbrace{\text{конформной}}$ алгебры. Мы знаем, что конформные преобразования – часть диффеоморфизмов. Значит, знаем, как преобразуются скалярные и тензорные поля. Но представления конформной алгебры этими полями не ограничиваются. (Доп. простейшие – неприводимые – представления)

⑦ Конформные токи.

↦ Общее выражение для тока,

↦ Нетеровский ТЭИ – несимметричный

↦ Пусть у модели есть гравитационный ТЭИ, – вплоть симметричный.
Тогда всё ок. ↦ Задача,

↦ В общем случае нельзя симметризовать Θ^{μ}_{ν}. Можем, т.к. есть сферические симметрии!

↦ К нашим бармам; Выражение для дилатонного и конформного токов.

↦ Пусть дилатонный ток сохраняется. Тогда если $V_{\mu} = 0$, то и конформный ток сохраняется.

Задача. Пусть $V_{\mu} = \partial_{\alpha} L_{\alpha\mu}$

$\boxed{\text{CFT}}$

$\boxed{\text{Лекция 1}}$

$\boxed{\text{Семинары}}$ $\boxed{\text{Задачи у Полыгалова, Дифранческа, [redacted]}}$

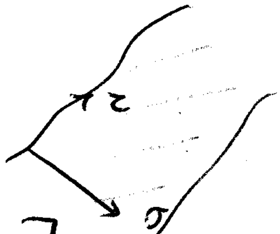
$\boxed{\text{50\% задач = [illegible]}}$

<u>Цель курса</u> – Изучить CFT – Конформные теории поля

Масштабная инвариантность: $x^\mu \mapsto \lambda x^\mu$

Конформная инвариантность – обобщение масштабной инвариантности.

<u>Зачем изучать CFT?</u>



$\mapsto$ <u>Наиболее мощные приложения</u>: $\boxed{\text{2D CFT}}$

Мы увидим, что в этом случае CFT имеет ∞ число генераторов, и можно получить точные решения $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Точные решения!}}$

$\Downarrow$

а) Теория струн.

б) Теория конденсированного состояния – 2D систем.

$\mapsto$ <u>Фиксированные точки ренормгруппы</u>:

$$\boxed{g(\mu) \mapsto g_*} \quad \text{при} \begin{bmatrix} \mu \to \infty \\ \mu \to 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{UV фикс. точка} \\ \text{IR фикс. точка.} \end{matrix}$$

Нет масштаба! $\Rightarrow$ инвариантность $x^\mu \to \lambda x^\mu$

А там, где масштабная инвариантность, там и CFT (Не гарантировано!)

ФЭЧ: UV фикс. точка $\leftrightarrow$ при $\mu \to \infty$ любая разумная модель $\mapsto$ CFT

(Знаем модель внизу.)

Ф Конденс. сост.: IR фикс. точка (Знаем модель наверху)

$\mapsto$ Фазовые переходы II ...

$\mapsto$ AdS/CFT соответств. Часть теорфизики

Соответствие между

4D CFT	SUGRA 5D
Quantum	Classical (Quantum Superstrings)

Применения:

а) Описание сильно-взаимодействующей КТП (ф)ч, конденсир. среды)

б) Описание суперструн и SUGRA

в) Построение феноменологических моделей - 5-мерных! (КХD) (Техницвет)

Конформная алгебра

Конформные преобразования — преобразования координат, которые сохраняют углы.

$$x^\mu \mapsto \lambda x^\mu$$

$$g_{\mu\nu} \mapsto g'_{\mu\nu} = \frac{1}{\lambda^2} g_{\mu\nu} \qquad A^\mu g_{\mu\nu} B^\nu = \frac{1}{\lambda^2} A^\mu g_{\mu\nu} B^\nu$$

$$g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = g'_{\mu\nu}\, dx'^\mu dx'^\nu \qquad \|A\| \|B\|$$

~~Какие ещё преобразования сохраняют углы?~~

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \mapsto \Omega^2(x)\, g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$$

$(AB) \leftrightarrow$

Как это представить себе?

$\boxed{\text{Локально: поворот и дилатации}}$

$$\left[\; \eta_{\mu\nu} \mapsto \Omega(x)\,\eta_{\mu\nu} \qquad \frac{(AB)}{\|A\|\,\|B\|} \Rightarrow \text{const} \;\right]$$

Обобщение масштабного преобразования.

Сведем конформную симметрию к движению пространства.

$$x^\mu \mapsto x^\mu + \xi^\mu$$

$$g_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}$$

$$\boxed{\mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu} = \xi^\lambda \partial_\lambda \eta_{\mu\nu} + \eta_{\mu\lambda}\partial_\nu \xi^\lambda + \eta_{\nu\lambda}\partial_\mu \xi^\lambda}$$

$$= \eta_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = (1+2f)\,\eta_{\mu\nu} \qquad \boxed{\Omega = 1+f}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = 2f\,\eta_{\mu\nu}} \qquad D f = \partial_\lambda \xi^\lambda$$

$$\boxed{\Omega = 1 + \frac{1}{D}\left(\partial_\lambda \xi^\lambda\right)}$$

$$\boxed{\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \frac{2}{D}\,\partial_\lambda \xi^\lambda\,\eta_{\mu\nu}}$$ – Уравнение на конформные преобразования

Решим уравнение: $\partial^2 \xi_\nu + \partial_\nu(\partial\xi) = \frac{2}{D}\,\partial_\nu(\partial\xi)$

$\boxed{D=2}$ $\quad \boxed{\partial^2 \xi_\nu = 0}$ $\quad$ Переходим в Евклид (x,τ)

$$\boxed{\begin{aligned} z &= x + i\tau \\ \bar z &= x - i\tau \end{aligned}}$$

$$dz\,d\bar z = (dx + i\,d\tau)(dx - i\,d\tau) = dx^2 + d\tau^2 \Rightarrow \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\bar z = z^*}$$

$$\partial_z \xi_z + \partial_z \xi_z = \frac{2}{D}\, \eta_{zz} (\partial_\lambda \xi^\lambda) = 0$$

$$\partial_z \xi_z = 0 = \partial_z \xi^{\bar z}$$

$$\boxed{\xi^{\bar z} = \bar\xi(\bar z)}$$

$$\partial_{\bar z} \xi_{\bar z} + \partial_{\bar z} \xi_{\bar z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\xi^z = \xi(z)}$$

$$\xi_{\bar z} = \overset{1/2}{\eta_{\bar z z}}\, \xi^z = \frac{1}{2} \xi^z$$

$$\underbrace{\partial_z \xi_{\bar z} + \partial_{\bar z} \xi_z}_{1/2(\partial\xi + \bar\partial\bar\xi)} = \underset{1/2}{\eta_{z \bar z}} \left(\partial\xi + \bar\partial\bar\xi\right)$$

Выполнено автоматически

$$\partial_\lambda \xi^\lambda = \partial_z \xi^z + \bar\partial \bar\xi$$

$$\Downarrow$$

В $D=2$ конформные преобразования задаются 2-мя аналитическими функциями $\xi(z)$ и $\bar\xi(\bar z)$

$$\boxed{\xi^\mu = (\underset{z}{\xi}, \underset{\bar z}{\bar\xi})}$$

$\boxed{D \neq 2}$ $\boxed{\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \eta_{\mu\nu} f}$ $\boxed{f = \frac{2}{D} \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \xi^\lambda}$

$$(-)\left|\begin{array}{l} \partial_\lambda \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\lambda \partial_\nu \xi_\mu = \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda f \\ \partial_\mu \partial_\nu \xi_\lambda + \partial_\mu \partial_\lambda \xi_\nu = \eta_{\nu\lambda} \partial_\mu f \\ \partial_\nu \partial_\lambda \xi_\mu + \partial_\nu \partial_\mu \xi_\lambda = \eta_{\lambda\mu} \partial_\nu f \end{array}\right.$$

$$\boxed{2 \partial_\nu \partial_\lambda \xi_\mu = \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda f + \eta_{\lambda\mu} \partial_\nu f - \eta_{\nu\lambda} \partial_\mu f}$$

$$\boxed{2 \Delta \xi_\mu = \partial_\mu f (2 - D)}$$

$$\partial^2 \left(\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu\right) = \eta_{\mu\nu} \partial^2 f \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\partial_\mu \partial_\nu f (2-D) = \eta_{\mu\nu} \partial^2 f}$$

$$2 \Box \partial_\nu \xi_\mu = \partial_\mu \partial_\nu f (2-D)$$

$$\Box (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) = \partial_\mu \partial_\nu f (2-D) \qquad \boxed{\Box f (1-D) = 0}$$

$\boxed{D = 1} \Rightarrow$ Any model is conformal. $2 \partial_1 \xi_1 = f$

$\boxed{D = 2}$ $\xi(z)$ $\bar{\xi}(\bar{z})$

$\boxed{D \geq 3}$ $\boxed{\partial_\mu \partial_\nu f = 0} \Leftrightarrow \boxed{f = A + B_\lambda X^\lambda}$

$$2 \partial_\nu \partial_\lambda \xi_\mu = \eta_{\mu\nu} B_\lambda + \eta_{\lambda\mu} B_\nu - \eta_{\nu\lambda} B_\mu = Const$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\xi_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} X^\nu + c_{\mu\nu\lambda} X^\nu X^\lambda}$$

~~[illegible]~~ $\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \eta_{\mu\nu} (A + B_\lambda X^\lambda)$

Уравнения для $\partial_\mu \partial_\nu \xi_\alpha \Rightarrow$

$$4 C_{\mu\nu\alpha} = \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha f + \eta_{\alpha\mu}\partial_\nu f - \eta_{\nu\alpha}\partial_\mu f =$$

$$= \eta_{\mu\nu} B_\alpha + \eta_{\alpha\mu} B_\nu - \eta_{\nu\alpha} B_\mu .$$

$$\boxed{C_{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{4}\left(\eta_{\mu\nu}B_\alpha + \eta_{\alpha\mu} B_\nu - \eta_{\nu\alpha} B_\mu\right)}$$

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \eta_{\mu\nu}(A + B_\alpha x^\alpha)$$

$$b_{\nu\mu} + b_{\mu\nu} + \boxed{(2C_{\mu\nu\rho} + 2C_{\nu\mu\rho})x^\rho} = \eta_{\mu\nu}(A + \underline{\underline{B_\alpha x^\alpha}})$$

$$\frac{\cancel{2}x^\rho}{\cancel{4}}\left(\cancel{2}\eta_{\mu\nu}B_\rho + \right)$$

$$b_{\nu\mu} + b_{\mu\nu} = A\eta_{\mu\nu} \Rightarrow \boxed{b_{\mu\nu} = \frac{A}{2}\eta_{\mu\nu} + m_{\mu\nu}}$$

$$\boxed{\xi_\mu = \underbrace{a_\mu}_{\text{Сдвиг}} + \underbrace{\frac{A}{2}x_\mu}_{\text{Дилатации}} + \underbrace{m_{\mu\nu}x^\nu}_{\text{Поворот}} + \underbrace{\frac{1}{4}\left(2x_\mu(Bx) - B_\mu x^2\right)}_{\text{Специальные конформные преобразования}}}$$

<u>Сдвиг</u>
$x^\mu \mapsto x^\mu + a^\mu$.

<u>Дилатации</u>
$x^\mu \mapsto (1 + A/2)x^\mu$

<u>Поворот</u>
$x^\mu \mapsto O^\mu{}_\nu x^\nu$

<u>Специальные конформные преобразования.</u>

(SCT)

Д/З Найдите большие конформные преобразования

$$\boxed{dx^\mu = dB_\nu \left(2x^\mu x^\nu - \eta^{\mu\nu} x^2\right)}$$

<u>Решение</u> а) $dx^\mu \uparrow\uparrow B^\mu$

$$dx^\mu = 2x^\mu (x\, dB) - dB^\mu x^2 \quad \uparrow\uparrow x^\mu$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} B^\mu &= N^\mu \cdot B \\ x^\mu &= N^\mu \cdot x \end{aligned}}$$

$$\boxed{(N^\mu)^2 = 1}$$

$$\cancel{N^\mu} dx = \cancel{2} x^2 (\cancel{x} dB) - \cancel{dB\, x^2}$$

$$-d\frac{1}{x} = dB \Rightarrow$$

$$+\frac{1}{x'} = +\frac{1}{x} - B$$

$$x' = \frac{x}{1 - Bx} \Rightarrow \boxed{x'^\mu = \frac{x^\mu}{1 - B^\nu x^\nu}}$$

<u>Проверка</u>

$$dx'^\mu = \underbrace{\frac{x^\mu \, x^2}{(1 - B^\nu x^\nu)^2}}_{x'^2} \left(\frac{-dB^\nu x^\nu}{x^2}\right) =$$

$$= -x'^2 \, dB \, N^\mu \quad \text{ok}$$

б) $\boxed{x^\mu \perp dB^\mu}$

$$dx'^\mu = dB^\nu \left(2x'^\mu x'^\nu - x^2 \eta^{\mu\nu}\right)$$

$$d(Bx) = dB_\mu x^\mu + B^\mu dB^\nu \left(2x^\mu x^\nu - \eta^{\mu\nu} x^2\right)$$

$$- \frac{x^2}{2} dB^2$$

$$= x^\mu dB_\mu + dB^\nu x^\nu (2Bx) - \cancel{B^\mu} dB^\mu x^2$$

$\boxed{\text{Д/З}}$ Написать больше конформных преобразований $\underbrace{}_{\boxed{\text{специальные}}}$

$$\boxed{dx^\mu = dB_\nu\left(2x^\mu x^\nu - \eta_{\mu\nu}x^2\right)}$$

Вычислить конформный фактор Ω

$\boxed{\text{Решение}}$

$$\boxed{\tilde{x}^\mu = \frac{x^\mu}{x^2}}$$

$$d\tilde{x}^\mu = \frac{x^2 dx^\mu}{x^4} - \frac{x^\mu}{x^4}2x^\nu dx_\nu = -\frac{dx_\nu}{x^4}\left(2x^\mu x^\nu - x^2\eta_{\mu\nu}\right) =$$

$$= -\frac{dB_\lambda}{x^4}\underbrace{\left(2x^\nu x^\lambda - \eta^{\nu\lambda}x^2\right)\left(2x^\mu x^\nu - \eta^{\mu\nu}x^2\right)}_{\cancel{4x^\mu x^\lambda x^2} - 2\cancel{x^\mu x^\lambda x^2} - 2\cancel{x^\mu x^\lambda x^2} + \eta^{\mu\lambda}x^4}$$

$$= -dB_\mu$$

$$\boxed{\tilde{x}'^\mu = -B^\mu + \tilde{x}^\mu}$$

$$\frac{x^{\mu\prime}}{x'^2} = -B^\mu + \frac{x^\mu}{x^2}$$

$$\frac{\cancel{(x^\mu)^2}}{x'^2} = B^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{2(Bx)}{x^2}$$

$$\boxed{x'^2 = \frac{x^2}{B^2x^2 + 1 - 2(Bx)}}$$

$$\boxed{x^{\mu\prime} = \frac{x^\mu - B^\mu x^2}{B^2x^2 + 1 - 2(Bx)}}$$

Проверка

$$dx'^\mu = \frac{-dB^\mu x^2}{B^2x^2+1-2(Bx)} - \frac{(x^\mu - B^\mu x^2)}{(B^2x^2+1-2(Bx))^2} \times$$

$$dB^\nu \; 2 \times (\cancel{2}B^\nu \cancel{dB^\nu} x^2 - \cancel{2B}x_\nu) =$$

$$= dB_\nu \left(2x'^\mu x'^\nu - g^{\mu\nu} x'^2 \right)$$

ok

$$x'^2 = \frac{x^2 - 2(Bx)x^2 + B^2x^4}{(B^2x^2+1-2(Bx))^2} = \frac{x^2}{B^2x^2+1-2(Bx)}$$

$$(dx'^\mu)^2 = 2dB_\nu \frac{(x^\mu - B^\mu x^2)(x^\nu - B^\nu x^2)}{(B^2x^2+1-2(Bx))^2} - \frac{\cancel{x^\mu} x^2\, dB_\mu}{B^2x^2+1-2(Bx)}$$

$$\boxed{x'^2 = x'^\mu x'^\nu \eta_{\mu\nu} = \Omega^2 x^\mu x^\nu} = \frac{x^2}{B^2x^2+1-2(Bx)}$$

A

B

$$\boxed{\frac{x'^\mu}{x'^2} = \frac{x^\mu}{x^2} - b^\mu}$$

(i) Инверсия

(ii) Трансляция

(iii) Инверсия.

$$\boxed{\eta_{\mu\nu}\, dx'^{\mu} dx'^{\nu} = \frac{1}{\Gamma^2}\eta_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu}}$$

$$dx'^{\mu} = \frac{dx^{\mu} - 2B^{\mu}x^{\nu}dx^{\nu}}{B^2x^2+1-2(Bx)} - 2dx^{\nu}\frac{(x^{\mu}-B^{\mu}x^2)(\cancel{2}B^2x^{\nu}\boxed{\cancel{dx}} - \cancel{2}B^{\nu}\boxed{\cancel{dx}})}{(B^2x^2+1-2(Bx))^2}$$

$$= dx^{\nu}\left\{\frac{1}{(B^2x^2+1-2(Bx))^2}\right\}\left\{\eta^{\mu\nu}(B^2x^2+1-2(Bx)) -\right.$$

$$-2B^{\mu}x^{\nu}(\cancel{B^2x^2}+1-2(Bx)) - 2B^2x^{\mu}x^{\nu} + 2x^{\mu}B^{\nu} +$$

$$\left.+\cancel{2B^{\mu}x^{\nu}B^2x^2} - 2B^{\mu}B^{\nu}x^2\right\}$$

$$(dx')^2 = dx^{\nu}dx^{\lambda}\frac{1}{(B^2x^2+1-2(BX))^4}\left[\eta^{\nu\lambda}(B^2x^2+1-2(BX))^2 +\right.$$

$$+4\eta^{\mu\nu}(B^2x^2+1-2(BX))\left(-\cancel{2}B^{\mu}x^{\lambda}(1-2(Bx)) -\right.$$

$$\left.-\cancel{2}B^2x^{\mu}x^{\lambda} + \cancel{2}x^{\mu}B^{\lambda} - \cancel{2}B^{\mu}B^{\lambda}x^2\right]$$

$$+4\left[-\cancel{2}\underbrace{B^{\mu}x^{\nu}(1-2Bx)} - \cancel{2}\underbrace{B^2x^{\mu}x^{\nu}} + \cancel{2}x^{\mu}B^{\nu} - \cancel{2}B^{\mu}B^{\nu}x^2\right]$$

$$\left[-B^{\mu}x^{\lambda}(1-2(Bx)) - B^2x^{\mu}x^{\lambda} + x^{\mu}B^{\lambda} - B^{\mu}B^{\lambda}x^2\right]$$

$$\cancel{B^{\mu}x^{\nu}x^{\lambda}(1-2Bx)^2 + (Bx)B^2x^{\nu}x^{\lambda}(1-2Bx)+}$$

$$+4\left[x^{\nu}(-B^{\mu}+2(Bx)B^{\mu}-B^2x^{\mu}) + B^{\nu}(x^{\mu}-B_{\mu}x^2)\right]$$

$$\left[x^{\lambda}(-B^{\mu}+2(BX)B^{\mu}-B^2x^{\mu}) + B^{\lambda}(x^{\mu}-B_{\mu}x^2)\right]$$

$$4\Big[X^\nu X^\lambda \Big(B^2(1-2(BX))^2 + 2(BX)B^2(1-2(BX)) + B^4X^2 \Big)$$

$$B^2(1-2(BX))\big(\cancel{1-2(BX)} + \cancel{2(BX)}\big) + B^4X^2$$

$$B^2\big(1-2(BX) + B^2X^2\big)$$

$$+ (X^\nu B^\lambda + X^\lambda B^\nu)\Big(\cancel{- B^2X^2 + B^2(BX)X^2}$$

$$-(BX)(1-2(BX)) + B^2X^2(1-(BX)) \cancel{- B^2X^2 + B^2X^2(BX)}$$

$$+ B^\nu B^\lambda \big(X^2 + B^2X^2 - 2(BX)X^2 \big)$$

$$X^2\big(1+B^2X^2 - 2(BX)\big) \Big]$$

$$4\big(1+B^2X^2-2(BX)\big)\Big[B^2X^\nu X^\lambda - 2(BX)X^\nu B^\lambda + X^2B^\nu B^\lambda \Big]$$

$$(dx')^2 = dx^\nu dx^\lambda \frac{1}{(B^2x^2+1-2(Bx))^2}\Big[\, \eta^{\nu\lambda}\left(\cancel{B^2x^2+1-2(Bx)}\right) +$$

$$+4\Big[\, -\cancel{B^\nu x^\lambda (1-2(Bx))} - \cancel{B^2 x^\nu x^\lambda} + \cancel{x^\nu B^\lambda} - \cancel{B^\nu B^\lambda x^2}\,\Big]$$

$$+4\left(\cancel{B^2 x^\nu x^\lambda} - \cancel{2(Bx)\, x^\nu B^\lambda} + \cancel{x^2(B^\nu B^\lambda)}\right)\Big]$$

$$\boxed{\Pi^2 = (B^2x^2+1-2(Bx))^2}$$

Действие преобразования на скалярное поле.

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$$

$$\boxed{\varphi'(x') = \varphi(x)}$$

Генераторы

$$\boxed{\delta\varphi = \varphi'(x) - \varphi(x) = \varphi'(x-\xi) - \varphi(x) = -\xi^\mu \partial_\mu \varphi} \; \boxed{= +i\, a^i \hat{P}_i \varphi}$$

Преобразование поля по определению.

Параметры

$$\delta\varphi = -\left[a_\mu + \frac{A}{2} x_\mu + \underbrace{m_{\mu\nu} x^\nu} + \frac{1}{4}\left(2x_\mu (Bx) - B_\mu x^2\right)\right] \partial_\mu \varphi$$

$\boxed{P_\mu = -i\partial_\mu}$ Генератор трансляций

~~ ~~ $\boxed{D = -i x^\mu \partial_\mu}$ Генератор масштабных преобразований

$\boxed{L_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)}$ Генератор поворотов в преобразований Лоренца.

$$K_\mu = -i\left(2x^\mu x^\nu - \eta_{\mu\nu} x^2\right)\partial_\nu$$

$\boxed{K_\mu = -i\left(2x^\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu\right)}$ Специальные конформные преобразования.

$\boxed{8/3}$ Вывести коммутационные соотношения — Конформную алгебру

Решение

$$\boxed{[P_\mu P_\nu] = 0}$$

$$[P_\mu, D] = -i\partial_\mu (+i x^\nu \partial_\nu) = -\delta^\mu_\nu \partial_\nu = -\partial_\mu = -i P_\mu$$

$$\boxed{[P_\mu, D] = -iP_\mu}$$

$$[P_\mu, L_{\nu\lambda}] = [-i\partial_\mu, \; i x_\nu \partial_\lambda - i x_\lambda \partial_\nu] =$$

$$= +\delta_{\mu\nu}\partial_\lambda - \delta_{\mu\lambda}\partial_\nu = i\eta_{\mu\nu}\partial_\lambda - i\eta_{\mu\lambda}\partial_\nu$$

$$\boxed{[P_\mu, L_{\nu\lambda}] = i\eta_{\mu\nu}P_\lambda - i\eta_{\mu\lambda}P_\nu}$$

$$[L_{\mu\nu} L_{\lambda\rho}] = [i x_\mu \partial_\nu - i x_\nu \partial_\mu, \; i x_\lambda \partial_\rho - i x_\rho \partial_\lambda] =$$

$$= (i x_\mu \partial_\nu - i x_\nu \partial_\mu)(-i x_\lambda \partial_\rho + i x_\rho \partial_\lambda) -$$

$$+ (i x_\lambda \partial_\rho - i x_\rho \partial_\lambda)(i x_\mu \partial_\nu - i x_\nu \partial_\mu)$$

$$= -x_\mu \delta_{\nu\lambda}\partial_\rho + x_\mu \delta_{\nu\rho}\partial_\lambda + x_\nu \delta_{\mu\lambda}\partial_\rho - x_\nu \delta_{\mu\rho}\partial_\lambda +$$

$$+ x_\lambda \delta_{\rho\mu}\partial_\nu - x_\lambda \delta_{\rho\nu}\partial_\mu - x_\rho \delta_{\lambda\mu}\partial_\nu + x_\rho \delta_{\lambda\nu}\partial_\mu$$

$$= \delta_{\nu\lambda}\, i L_{\mu\rho} + i\delta_{\nu\rho} L_{\lambda\mu} + i\delta_{\lambda\mu} L_{\rho\nu} + i\delta_{\mu\rho} L_{\nu\lambda}$$

$$\boxed{[L_{\mu\nu} L_{\lambda\rho}] = -i\left(+\delta_{\mu\lambda} L_{\nu\rho} + \delta_{\nu\rho} L_{\mu\lambda} - \delta_{\mu\rho} L_{\nu\lambda} - \delta_{\nu\lambda} L_{\mu\rho}\right)}$$

$[P_\mu, D] = [-i\partial_\mu, +i x^\nu\partial_\nu] = -\partial_\mu = -iP_\mu$

$$\boxed{[P_\mu, D] = -iP_\mu}$$

$$\boxed{[D, L_{\nu\alpha}] = 0}$$

$[D, ix^\mu] = [-ix^\nu\partial_\nu, ix^\mu] = -i\, x^\mu$

$[D, \partial_\mu] = [-ix^\nu\partial_\nu, \partial_\mu] = i\partial_\mu = -i(-\partial_\mu)$

$\boxed{\begin{array}{l} x^\mu \text{ даёт } +1 \\ \partial_\mu \text{ даёт } -1 \end{array}}$

$[D, (x_\mu P_\nu)]$ $\leftrightarrow$ $\boxed{(x_\mu P_\nu) \text{ даёт } 0}$

$$\boxed{[D, K_\mu] = -iK_\mu}$$

<u>Определение</u> если $[D, \hat{A}] = -i\mu A$, то говорят, что оператор A имеет конформный вес μ

$[K_\mu, P_\nu] = \cancel{-i(2x^\mu x^\alpha\partial_\alpha - x^2\partial_\mu)}(+i\partial_\nu)$

$+ \partial_\nu(2x^\mu x^\alpha\partial_\alpha - x^2\partial_\mu) =$

$= 2\eta_{\mu\nu}x^\alpha\partial_\alpha + 2x_\mu\partial_\nu - 2x_\nu\partial_\mu$

$= 2iD\eta_{\mu\nu} - 2iL_{\mu\nu}$

$$\boxed{[K_\mu, P_\nu] = 2i(D\eta_{\mu\nu} - L_{\mu\nu})}$$

$$[K_\mu, L_{\lambda\rho}] = (-i)\left(2x^\mu x^\nu \partial_\nu - x^2\partial_\mu\right) i\,(x_\lambda \partial_\rho) -$$

$$- (\rho \leftrightarrow \lambda)$$

$$- \quad x_\lambda \partial_\rho \left(2x^\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu\right) =$$

$$= \cancel{2x^\mu x^\lambda \partial_\rho} \; \cancel{- x^2 \eta_{\mu\lambda}\partial_\rho} \; -2x_\lambda \eta_{\rho\mu}(x\partial) \; - \cancel{2 x_\lambda x_\mu \partial_\rho} +$$

$$+ \cancel{2 x_\lambda x_\rho \partial_\mu} \quad - (\rho \leftrightarrow \lambda)$$

$$- \eta_{\rho\mu}\, i \underbrace{\left[2x_\lambda (x\partial) - x^2\partial_\lambda\right](-i)}_{K_\lambda}$$

$$\cancel{- \eta_{\rho\mu} x^2 \partial_\lambda}$$

$$= i\eta_{\mu\lambda} K_\rho - i\eta_{\mu\rho} K_\lambda .$$

$$\boxed{[K_\mu, L_{\lambda\rho}] = i\left(\eta_{\mu\lambda} K_\rho - \eta_{\mu\rho} K_\lambda\right)}$$

Алгебра в более простом виде

AS матрица

$$J_{ab} = \{ a, b = -1, 0, \underbrace{1 \dots D}_{\mu,\nu} \}, \quad J_{ab} = -J_{ba}$$

$$J_{ab} = \begin{array}{c|ccc} & -1 & 0 & \mu \\ \hline -1 & 0 & J_{-10} = D & J_{-1,\mu} = \tfrac{1}{2}(P_\mu - K_\mu) \\ 0 & & 0 & J_{0\mu} = \tfrac{1}{2}(P_\mu + K_\mu) \\ \mu & & & J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} \end{array}$$

$$\boxed{[J_{ab}, J_{cd}] = i(\eta_{ad} J_{bc} + \eta_{bc} J_{ad} - \eta_{ac} J_{bd} - \eta_{bd} J_{ac})}$$

а) $\mu\nu \quad \rho\lambda \Rightarrow$ OK

б) $[J_{-10}, J_{-1\mu}] = i\left(\left(-\overset{1}{\eta_{-1,-1}}\right) J_{0\mu}\right) = i J_{0\mu}$ OK

$\quad ||$

$[D, \tfrac{1}{2}(P_\mu - K_\mu)] = -i\tfrac{1}{2}(-P_\mu - K_\mu) = i J_{0\mu}$

$\boxed{SO(d+1,1)}$ $\boxed{\eta_{ab} = (-1, 1 \dots 1)}$ либо $\boxed{SO(D,2)}$ $\boxed{\eta_{ab} = (-1, 1 \dots -1)}$

Если CFT живет в Минковском.

в) $[J_{-1,0}, J_{0,\mu}] = i\left(\underset{1}{\eta_{00}} J_{-1\mu}\right) = i J_{-1,\mu}$

$\quad ||$

$[D, \tfrac{1}{2}(P + K_\mu)] = -i\tfrac{1}{2}(-P + K_\mu) = \dots$

i) $[J_{-1,0}, J_{\mu\nu}] = 0$

$\quad\quad \shortparallel$ ok

$[D, L_{\mu\nu}] = 0$

d) $[J_{-1,\mu}, J_{0\nu}] = \frac{1}{4}[P_\mu - K_\mu, P_\nu + K_\nu] =$

$$= \frac{1}{4}\left([P_\mu K_\nu] - [K_\mu P_\nu]\right) =$$

$$= -i\eta_{\mu\nu}D$$

$$= -\frac{1}{4}\left([K_\mu P_\nu] + (\mu \leftrightarrow \nu)\right) = -\cancel{\tfrac{1}{4}}\cancel{2}i(\cancel{2}\eta_{\mu\nu}D) =$$

$i(-\eta_{\mu\nu} J_{-10}) = -i\eta_{\mu\nu}D$ ok

$$[K_\mu, K_\nu] = -[\underbrace{2x^\mu x^\rho \partial_\rho} - x^2\partial_\mu, 2x^\nu x^\rho\partial_\rho - x^2\partial_\nu] =$$

$$= -\Big(\cancel{2x^\mu x^\nu 2x^\rho\partial_\rho} + \cancel{2x^\mu x^\rho 2x^\nu\partial_\rho}$$
$$-\cancel{2x^\mu x^2 \partial_\nu} - \cancel{x^2\eta_{\mu\nu}2x^\rho\partial_\rho} -$$
$$-\cancel{x^2 2x^\nu\partial_\mu} + \cancel{x^2 2x_\mu\partial_\nu}\Big)$$

$-(\mu\leftrightarrow\nu) \quad = 0$ ok

e) $[J_{-1,\mu}, J_{-1,\nu}] = \frac{1}{4}[P_\mu - K_\mu, P_\nu - K_\nu] =$

$$= \frac{1}{4}\left(-[P_\mu, K_\nu] - [K_\mu, P_\nu]\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\underbrace{[K_\mu, P_\nu]} - (\mu\leftrightarrow\nu)\right) =$$

$$= +\cancel{\tfrac{1}{4}}(\cancel{2}i)(\cancel{\eta_{\mu\nu}D} + \cancel{2}L_{\mu\nu} + \cancel{L_{\nu\mu}}) = iL_{\mu\nu}$$ ok

$i((-\eta_{-1-1})J_{\mu\nu} - \cancel{\eta J_{\ldots}}) = iL_{\ldots}$

#) $[J_{-1\mu}, J_{\alpha\rho}] = \frac{1}{2}[P_\mu - K_\mu, J_{\alpha\rho}] =$

$$= \frac{1}{2}(i)(\eta_{\mu\alpha} P_\rho - \eta_{\mu\rho} P_\alpha) - \frac{1}{2} i (\eta_{\mu\alpha} K_\rho - \eta_{\mu\rho} K_\alpha) =$$

$$= i\, \underline{J_{-1\rho}\, \eta_{\mu\alpha}} - i\, \underline{\eta_{\mu\rho} J_{-1\alpha}}$$

Ok

$$i\,(\underline{\eta_{\mu\alpha}\, J_{-1\rho}} - \underline{\eta_{\mu\rho}\, J_{-1\alpha}})$$

3) $[J_{0\mu}\, J_{0\nu}] = \frac{1}{4}([P_\mu K_\nu] - [P_\nu K_\mu]) =$

$$= \frac{1}{4}[K_\mu P_\nu] - (\mu \leftrightarrow \nu) = -\cancel{\tfrac{1}{4}} \cdot \cancel{2} i\, L_{\mu\nu} \cdot \cancel{2}$$

Ok

$$\bullet\ i(-\eta_{00} J_{\mu\nu}) = -i\, L_{\mu\nu}$$

e) $[J_{0\mu}\, J_{\alpha\rho}] = i(\eta_{\mu\alpha} J_{0\rho} - \eta_{\mu\rho} J_{0\alpha})$ ok

---

<u>Замечание</u> $D, P_\mu, L_{\nu\lambda}$ – <u>подалгебра</u>

$\Downarrow$

Масштабная инвариантность <u>не обязательно</u> сопровождается конформной инвариантностью. <u>Но часто!</u>

$\boxed{\text{Токи}}$

Пусть
$$\begin{cases} \varphi'(x') = \hat{A}\varphi(x) = (1+\hat{a})\varphi(x) \\ x' = x - \xi \end{cases}$$
– Более общий закон преобразования.

$$\delta\varphi = \varphi'(x) - \varphi(x) = \varphi'(x') + \xi^\mu \partial_\mu \varphi - \varphi(x)$$
$$= \hat{a}\varphi(x) + \xi^\mu \partial_\mu \varphi(x)$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\delta\varphi = \hat{a}\varphi(x) + \xi^\mu \partial_\mu \varphi(x)}$$

$\boxed{\text{На уравнениях движения}}$

$$0 = \delta S = \int d^D x \left(\mathcal{L}(\varphi'(x), \partial_\mu \varphi'(x)) - \mathcal{L} \right) =$$

$$= \int d^D x' \, \mathcal{L}\big(\underbrace{\varphi'(x')}_{(1+\hat{a})\varphi(x)}, \underbrace{\partial'_\mu \varphi'(x')}_{\partial'_\mu (1+\hat{a})\varphi} \big) - S$$

$$= \int d^D x \underbrace{\left| \det \frac{\partial x'}{\partial x} \right|}_{\cancel{(1 - \partial\xi)}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \hat{a}\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \left(\partial_\mu \hat{a}\varphi + \partial_\mu \xi^\nu \partial_\nu \varphi \right) - (\partial\xi)\mathcal{L} \right)$$

$$\partial'_\mu \varphi = \partial_\nu \varphi \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \partial_\mu \varphi + \partial_\mu \xi^\nu \partial_\nu \varphi$$

Пусть a, ξ пропорциональны параметру преобразования ω

$$\partial_\mu \hat a = \frac{\partial a}{\partial \omega}\partial_\mu \omega + \cancel{\frac{\partial a}{\partial x}}\Big|_{\omega=const}$$

$\leftarrow$ При $\omega = const$ все члены сокращаются.

$$\delta S = \underbrace{\cancel{\delta S}\Big|_{\omega=const}}_{0} + \int d^D x \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\underbrace{\Big(\frac{\partial \hat a}{\partial\omega}\varphi + \frac{\partial \xi^\nu}{\partial\omega}\partial_\nu\varphi\Big)}_{\delta\varphi} - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \omega}\mathcal{L}\Big]\partial_\mu\omega.$$

$0 \equiv$ Из-за симметрии.

$\delta\varphi \leftrightarrow$ Имеем в виду производ. по ω

$\boxed{\delta S = 0}$ на уравнениях движения.

$\Downarrow$

$$\boxed{J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\varphi - \xi^\mu\mathcal{L}}$$

— Нётеровский ток!

Для скалярного поля [redacted] $\boxed{\Theta_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\nu\varphi - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}}$

Нётеровский ТЭИ.

$\Downarrow$

$$\boxed{J_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\xi^\nu\partial_\nu\varphi - \xi^\mu\mathcal{L} = T_{\mu\nu}\xi^\nu}$$

$\boxed{ДЗ}$ Пусть в действии модели можно добавить $\eta_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu}$ таким образом, что ~~сохраняется общая~~ действие становится общековариантным, а конформная симметрия — часть общековариантных преобразований. Тогда докажите, что

$$\delta_1 S = \int d^Dx \left[\frac{\delta S}{\delta\varphi}\delta\varphi + T^{\mu\nu} D_\nu \xi_\mu \sqrt{-g} \right],$$

где $T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}$ — <u>гравитационный ТЭИ</u>.

Он автоматически симметричен!

$$\Downarrow$$

$$j_\mu^{\nu} = T_{\mu\nu}\xi^\nu$$

$\boxed{Решение}$

$$\delta_\xi S = \int d^Dx \Big[\underbrace{\cancel{\frac{\delta S}{\delta\varphi}}\delta\varphi}_{0} + \underbrace{\cancel{\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}}}_{+\cancel{\frac{1}{2}}\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu}} \underbrace{\cancel{\delta g^{\mu\nu}}}_{+D^\mu\xi^\nu - \cancel{D^\nu\xi^\mu}} \Big]$$

$$\boxed{\delta g^{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi g^{\mu\nu} = -D^\mu\xi^\nu - D^\nu\xi^\mu}$$

$$T_{\mu\nu} = +\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = +\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu}}$$

$$\boxed{\delta_\xi S = \int d^D x \left[\frac{\delta S}{\delta \varphi}\delta\varphi + T^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, D^\mu \xi^\nu \right]}$$

$$\delta_\xi S = \int d^D x \left[\frac{\delta S}{\delta\varphi}\delta\varphi + T^{\mu\nu}\partial_\mu \xi^\nu\right]$$

Пример

$$S = -\frac{1}{2} \int d^D x\, (\partial_\mu\varphi)\, g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi \underbrace{\sqrt{|g|}}$$

$$+\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = -\left(+\frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{-g}}}\right)\left(+\cancel{\tfrac{1}{2}}\right)\left[\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(\partial\varphi)^2\right] = T_{\mu\nu}.$$

$$\frac{\delta\sqrt{|g|}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}(-)\frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}} \qquad \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} e^{\mathrm{tr}\ln g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}$$

$$\boxed{T_{\mu\nu} = -\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(\partial\varphi)^2}$$

$$\Theta_{\mu\nu} = \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\nu\varphi}\, - g_{\mu\nu}\mathcal{L} = -\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(\partial\varphi)^2$$

$$\delta_\xi S \equiv 0 \Rightarrow \underbrace{\int d^D x\, \frac{\delta S}{\delta\varphi}\delta\varphi} = \int T^{\mu\nu}\partial_\mu\xi^\nu = \delta S$$

По построению

Преобразование S при условии, что преобразуется только φ

$$\Downarrow$$

$$\boxed{J^\mu_\xi = T^{\mu\nu}\xi_\nu}$$

$\boxed{\text{Вернёмся к нашим баранам}}$

$$\boxed{J^\mu_\xi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\,\delta\varphi - \xi^\mu \mathcal{L}}$$

$\boxed{\text{Дилатонный ток}}$

$$\boxed{\delta\varphi = \xi^\mu \partial_\mu \varphi + \Delta\varphi}$$

$$\xi^\mu = x^\mu$$

$$\boxed{\delta\varphi = [(-i)(x^\lambda \partial_\lambda + i\Delta)]\varphi = \Delta\cdot\varphi + x^\lambda \partial_\lambda \varphi}$$

$$J^\mu_\xi = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} x^\nu \partial_\nu \varphi - x^\mu \mathcal{L}}_{\Theta_{\mu\nu} x^\nu} + \Delta\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\varphi\right) -$$

$$\boxed{J^\mu_\xi = \Theta_{\mu\nu} x^\nu + V_\mu} \qquad \boxed{V_\mu = \Delta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\varphi}$$

$$\boxed{\Theta^\mu_\nu = T^\mu_\nu + \partial_\lambda Y^{\lambda\mu}{}_\nu}$$

$\uparrow$ Симметричный

Если ток можно симметризовать, то $\boxed{Y^{\lambda\mu}{}_\nu = -Y^{\mu\lambda}{}_\nu}$

$$J^\mu_\xi = T^\mu{}_\nu x^\nu + \partial_\lambda Y^{\lambda\mu}{}_\nu x^\nu + \Delta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\varphi$$

$$+ \partial_\lambda\left(Y^{\lambda\mu}{}_\nu x^\nu\right) - Y^{\lambda\mu}{}_\lambda$$

$$\boxed{\tilde{V}_\mu = \Delta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\varphi - Y^{\lambda\mu}{}_\lambda}$$

$$\boxed{J^\mu_D = T^\mu{}_\nu x^\nu + \tilde{V}_\mu} \;!$$

$\boxed{\text{Закон сохранения}}$

$$\partial_\mu J^\mu_D = 0 \Rightarrow T^\mu_\mu + \partial_\mu \tilde{V}_\mu = 0 \Rightarrow \boxed{T^\mu_\mu = -\partial_\mu \tilde{V}_\mu}$$

$\boxed{\text{Как преобразуются поля}}$

$$\Phi'(x') = (1 - i\omega T)\,\Phi(x) \Rightarrow \boxed{L_{\mu\nu} = L^{(Spacetime)}_{\mu\nu} + L^{(Spin)}_{\mu\nu}}$$

Полный опер-р момента.

Генератор, действующий на внутреннее состояние. (Индексы)

$$\delta\Phi(x) = \Phi'(x) - \Phi(x) = -i\omega(T_{spacetime} + T)\,\phi(x)$$

Рассмотрим подгруппу, которая оставляет точку $x=0$ неподвижной

$$L_{\mu\nu}\Phi(0) = S_{\mu\nu}\Phi(0)$$

Спин-оператор: пространственная часть сократилась.

$x=0$

$$e^{ixP} L_{\mu\nu} e^{-ixP} = \underbrace{[e^{ixP}, \cancel{L_{\mu\nu}}]}\,\cancel{e^{-ixP}} + L_{\mu\nu}$$

$$-\cancel{e^{ixP}}\, i x^\alpha [P_\alpha, \cancel{L_{\mu\nu}}]$$

$$i(\eta_{\alpha\mu} P_\nu - \eta_{\alpha\nu} P_\mu)$$

$$L_{\mu\nu}\big|_x = e^{ixP} L_{\mu\nu} e^{-ixP} = L_{\mu\nu}\big|_{x=0} - x_\mu P_\nu + x_\nu P_\mu$$

$$L_{\mu\nu}\big|_{x=0} = S_{\mu\nu}$$

Спин-оператор

$$\boxed{L_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)} \qquad \boxed{P_\mu = -i\,[illegible]}$$

[redacted]

Full Conformal group

$\overset{\bullet}{x=0}$ $\Rrightarrow$ Подгруппа: $\begin{cases}\to \text{Повороты} \\ \to \text{Дилатации} \\ \to \text{Специальные конформные.}\end{cases}$

Инвариантные точки

$$\boxed{\begin{aligned} D\,\Phi(0) &= \tilde{\Delta}\,\Phi(0) \\ L_{\mu\nu}\,\Phi(0) &= S_{\mu\nu}\,\Phi(0) \\ K_\mu\,\Phi(0) &= \varkappa_\mu\,\Phi(0) \end{aligned}}$$

$\Delta, S_{\mu\nu}, \varkappa$ — Матрицы

Они действуют на внутренние индексы.

$\Downarrow$

Матричная алгебра

$$[\tilde{\Delta}, \varkappa_\mu] = -i\,\varkappa_\mu$$

$$[\varkappa_\mu, S_{\lambda\rho}] = i(\eta_{\mu\lambda}\varkappa_\rho - \eta_{\mu\rho}\varkappa_\lambda)$$

$$[S_{\mu\nu}, S_{\lambda\rho}] = i(\eta_{\mu\rho}S_{\nu\lambda} + \eta_{\nu\lambda}S_{\mu\rho}) - (\mu\leftrightarrow\nu)$$

$$[\tilde{\Delta}, S_{\mu\rho}] = 0$$

$\boxed{\varkappa_\mu \text{ — Ведёт себя как импульс!}}$ $\Rrightarrow$ Строим представление Δ & $S_{\mu\nu}$, затем

Δ — Имеет собственные числа, собственные векторы.

Подпространство $\boxed{\tilde{\Delta} = I\cdot\Delta}$

Конформная размерность оператора.

$\Downarrow$

Каждый генератор имеет $\begin{cases}\text{Спин } S \text{ и его проекция} \\ \text{Конформную размерность } \Delta\end{cases}$

Теперь распишем действие опер-ров на произвольный x

$$D(a) = e^{iPa} D(0) e^{-iPa} = [e^{iPa} D(0)]\, e^{-iPa} \cancel{+} D(0)$$

$$= +\cancel{e^{iPa}}\, i a^\mu \underbrace{[D(0), P_\mu]}_{i P_\mu} \cancel{e^{-iPa}} + D(0) = a^\mu P_\mu + \Delta$$

$$\boxed{D = \Delta - i x^\mu \partial_\mu}$$

Внутренний опер-р, действующий на индексы.

$$K_\mu(a) = e^{iPa} K_\mu(0) e^{-iPa} = K_\mu(0) + \underbrace{[e^{iPa} K_\mu(0)]}\, e^{-iPa}$$

$$= \sum \frac{i^n}{n!} (Pa)^{n-1} \underbrace{(Pa)\, K_\mu(0)}_{\parallel} e^{-iPa} =$$

$$K_\mu(0)\,(Pa) + a^\nu [P_\nu, K_\mu]$$

$$\cancel{-[K_\mu P_\nu]} - 2i(\eta_{\mu\nu} D - L_{\mu\nu})$$

$$= \Big[K_\mu(0) \overbrace{\sum \frac{i^n}{n!} (Pa)^n}^{e^{iPa}} - 2i \sum_n \sum_{m=0}^{n-1} \frac{i^n}{n!} (Pa)^{n-m-1} a^\mu (\eta_{\mu\nu} D - L_{\mu\nu}) \times (Pa)^m \Big] e^{-iPa}$$

$$[Pa, D] \cancel{=} a^\nu [P_\nu, D] = \boxed{-i a^\nu P_\nu}$$

$$[Pa, L_{\mu\nu}] = a^\lambda [P_\lambda, L_{\mu\nu}] = a^\lambda i(\eta_{\lambda\mu} P_\nu - \eta_{\lambda\nu} P_\mu)$$

$$K_\mu(a) = K_\mu(0) + 2i\,\cancel{\eta_{\mu\nu}}\, D\, a_\mu \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{\sum_{m=0}^{n-1}} \frac{i^n}{n!} (Pa)^{n-1} (n) \, e^{-iPa}$$

$$i$$

$$+ \cancel{2}i\, a^\mu i \sum_{n=0} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{i^{n-2}}{n!} (n-m-1)\, a^\lambda \cancel{(\ldots)} (+P_\lambda) \times (Pa)^{n-m-2} e^{-iPa} \times \frac{n(n-1)}{2}$$

$$+ 2i\, a^\nu L_{\mu\nu} \sum_n \sum_{m=0}^{n-1} \frac{i^n}{n!} (Pa)^{n-1} e^{-iPa}$$

$$i$$

$$+ 2i\, a^\nu i\, a^\lambda i\, (\eta_{\lambda\mu} P_\nu - \eta_{\lambda\nu} P_\mu) \sum_{n=0}^{\infty} \cancel{\sum_{m=0}^{n-1}} \frac{i^{n-2}}{n!} (Pa)^{n-2} \cancel{(n-m-1)} \times \frac{n(n-1)}{2} \times e^{-iPa}$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} (n-m-1) = \frac{1}{2} n(n-1)$$

$$K_\mu(a) = \underline{K_\mu(0)} + \underline{2 a_\mu D} + a^\mu (aP) \cancel{\ldots} -$$

$$\underline{-2a^\nu L_{\mu\nu}} \; \cancel{+ a^\mu (aP)} + a^2 P_\mu .$$

$$\boxed{K_\mu = \mathcal{X}_\mu + 2x_\mu \tilde{\Delta} - 2x^\nu S_{\mu\nu} + 2x^\mu (xP) - x^2 P_\mu}$$

<u>Строим пр-во состояний</u> (i) $|x, \psi\rangle = e^{iPx} |0, \psi\rangle$

$\swarrow\!\!\nearrow$

Находится в представлении малой конформной группы $(\Delta, S_{\mu\nu}, \mathcal{X}_\mu)$

(ii) Переходим в базис $|k\rangle$: $\hat{K}^\mu |k\rangle = k_\mu |k\rangle$

$[\mathcal{X}_\mu \mathcal{X}_\nu] = 0 \longleftrightarrow$

(iii) Делаем Лоренцев преобразование в $|k\rangle \longmapsto ||k|, 0..0\rangle$

$$e^{iS_{0i}\alpha^i} |k\rangle = ||k|, 0, ..., 0\rangle$$

Очевидно $|k|$ - Коммутирует со всем на свете кроме Δ

(S_{ij}, Δ) - Коммутируют между собой

$\Downarrow$

$\boxed{e^{iPx} e^{iS_{0i}\alpha^i} |s_1 s_2, \Delta\rangle \text{ - Все состояния}}$ $\boxed{\tilde{\Delta} \text{ - Not Hermitean}}$

$\boxed{\text{Большое конформное преобразование}}$

$\boxed{8/3}$ Показать, что при большом конформном преобразовании $S_{\mu\nu}=0$

$$\boxed{\phi'(x') = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{-\Delta/D} \phi(x)}$$

Такие поля называются <u>квази-примарными</u>

<u>Решение</u>

$$\delta\Phi = (1 + \underbrace{i\lambda D}_{\lambda\Delta + \lambda x^\mu\partial_\mu} + iP^\mu a_\mu + \underbrace{i\varepsilon^\mu K_\mu}_{\text{Маленькие}})\,\Phi$$

$$i\varepsilon^\mu K_\mu \to \varepsilon_\mu 2x^\mu\Delta + \varepsilon_\mu\left(2x_\mu(x\partial) - x^2\partial_\mu\right)$$

$$\boxed{\phi'(x') = \underbrace{(1 + \lambda\Delta + 2(\varepsilon x)\Delta)}_{\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^{\Delta/D}}\,\Phi(x)}$$

$$x'^\mu = \left(1 + \lambda x^\nu\partial_\nu + \xi^\nu\partial_\nu + 2(\varepsilon x)x^\nu\partial_\nu + x^2\varepsilon^\nu\partial_\nu\right)x^\mu =$$

$$= x^\mu + \lambda x^\mu + \xi^\mu + 2(\varepsilon x)x^\mu + x^2\varepsilon^\mu$$

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \lambda\delta^\mu_\nu + 2(\varepsilon x)\delta^\mu_\nu + 2\varepsilon^\nu x^\mu + 2x^\nu \ldots$$

$$\det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) = 1 + \lambda D + 2(\varepsilon x)D$$

Конформные фии

Пусть мы сделали теорию общековариантной. Тогда при координатных преобразованиях.

$$\delta S_{GR} = \int d^D x \left[\frac{\delta S}{\delta \psi}\delta\psi - \underbrace{T^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, D_\mu \xi_\nu}_{\text{Преобразование } g_{\mu\nu}}\right] \equiv 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\delta S \equiv \int d^D x \left(\frac{\delta S}{\delta \psi}\delta\psi\right) = \int d^D x \sqrt{-g}\, T^{\mu\nu} D_\mu \xi_\nu}$$

При любом общековариантном преобразовании.

Если $D_\mu \xi_\nu + D_\nu \xi_\mu = 2f(x) g_{\mu\nu}$, то $\boxed{T^\mu_\mu = 0}$ $\leftrightarrow$ Симметричный ТЭИ.

Конформный ток

$$\delta\varphi = \left(1 + i b_\mu K^\mu\right)\varphi = \left(1 + \cancel{i}\, b_\mu (+\cancel{i})\, 2x_\mu \Delta\right)$$

$$+ \cancel{i}\, b_\mu (+\cancel{i})\left(2x_\mu (x\partial) - x^2 \partial_\mu\right) + 2x^\nu i b_\mu S_{\mu\nu}\Big)\varphi$$

$$\boxed{J^\mu_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\delta\varphi - \xi^\mu \mathcal{L}}$$

$\boxed{x' = x - \xi}$ $\qquad -\delta x = \xi = \left(1 + i b_\mu K^\mu\right) x =$

$$-\delta x^\mu = \left(1 + b_\kappa\left(2x_\kappa(x\partial) - x^2\partial_\kappa\right) + 2i\,\cancel{b_\kappa x^\nu S_{\kappa\nu}}\right)x^\mu - x^\mu$$

$$= 2(bx)\,x^\mu - x^2(b_\mu) + \cancel{2i\, b_\kappa x^\nu S_{\kappa\nu} x^\mu}$$

$$J^\mu_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\Big[\,2(x^\alpha)(x\partial) - x^2(\partial^\alpha) + 2(x^\alpha)\Delta + 2i\, x^\nu S_{\alpha\nu}\Big]\varphi -$$

$$- \Big[\,2(x^\alpha)x^\mu - x^2\eta_{\mu\alpha} + \ldots\Big]\mathcal{L}$$

у x нет спина!

$$J^\mu_\alpha = \left(2x^\alpha x^\lambda - x^2\eta^{\lambda\alpha}\right)\left(\theta^\mu_{\lambda} + \cancel{\eta_{\mu\alpha}\mathcal{L}}\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \ldots$$

$+ 2i\, S \ldots$

$$\boxed{\theta^\mu_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\alpha\varphi - \eta_{\mu\alpha}\mathcal{L}}$$

$- 2(2x^\alpha x^\mu - x^2 \ldots$

$$\boxed{J^\mu_\alpha = \left(2x^\alpha x^\lambda - x^2\eta^{\lambda\alpha}\right)\theta^\mu_\lambda + 2(\eta_{\alpha\nu}\Delta + \ldots}$$

$$\boxed{\text{Симметризуем } T^{\mu}_{\alpha}}$$

$$\boxed{\Theta^{\mu}_{\alpha} = T^{\mu}_{\alpha} + \partial_{\rho} Y^{\rho\mu}{}_{\alpha}} \qquad \boxed{Y^{\rho\mu}{}_{\alpha} = - Y^{\mu\rho}{}_{\alpha}}.$$

Для этого воспользуемся сохраняющимся моментом

$$M_{\mu\nu\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi)} \delta\varphi_{\nu\alpha} - \xi^{\mu}\mathcal{L}$$

Импульс:

$$\begin{cases} \xi^{\mu} = \delta x^{\mu} = i P_{\nu} x^{\mu} = \delta_{\mu\nu} \\ \delta\varphi = i P_{\nu}\varphi = \partial_{\nu}\varphi \end{cases} \qquad \boxed{P_{\nu} = -i\partial_{\nu}}$$

$$\boxed{\Theta^{\mu}_{\nu} = \pi^{\mu}\partial_{\nu}\varphi - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}}$$

Момент

$$\begin{cases} \xi^{\mu} = \delta x^{\mu} = i L_{\nu\alpha} x^{\mu} = i \cdot i\,(-x_{\nu}\partial_{\alpha} + x_{\alpha}\partial_{\nu})\, x^{\mu} + \cancel{i S_{\nu\alpha} x^{\mu}} \\ \quad = -x_{\nu}\delta^{\mu}_{\alpha} + x_{\alpha}\delta^{\mu}_{\nu} + \cancel{i S_{\nu\alpha} x^{\mu}} \leftarrow \text{Спин не действует} \\ \delta\varphi = -x_{\nu}\partial_{\alpha}\varphi + x_{\alpha}\partial_{\nu}\varphi + i S_{\nu\alpha}\varphi \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu\alpha} &= -\pi^{\mu} x_{\nu}\partial_{\alpha}\varphi + \pi^{\mu} x_{\alpha}\partial_{\nu}\varphi + i\pi^{\mu} S_{\nu\alpha}\varphi - \mathcal{L}(-x_{\nu}\delta^{\mu}_{\alpha} + x_{\alpha}\delta^{\mu}_{\nu}) = \\ &= -x_{\nu}(\Theta^{\mu}_{\alpha} + \cancel{\eta^{\mu}_{\alpha}\mathcal{L}}) + x_{\alpha}(\Theta^{\mu}_{\nu} + \cancel{\eta^{\mu}_{\nu}\mathcal{L}}) + i S_{\nu\alpha}\varphi \\ &\quad \cancel{- \mathcal{L}(-x_{\nu}\delta^{\mu}_{\alpha} + x_{\alpha}\delta^{\mu}_{\nu})} \\ &= -x_{\nu}\Theta^{\mu}_{\alpha} + x_{\alpha}\Theta^{\mu}_{\nu} \\ &\quad + i S_{\nu\alpha}\varphi \end{aligned}$$

$$\boxed{M_{\mu\nu\lambda} = -x_\nu \Theta^\mu_\lambda + x_\lambda \Theta^\mu_\nu + i S_{\nu\lambda} \varphi \pi^\mu}$$

$$\boxed{Y^{\rho\mu}_\alpha = -\frac{i}{2}\left[\pi^\rho S^\mu_\alpha \varphi - \pi^\mu S^\rho_\alpha \varphi - \pi^\alpha S^{\rho\mu}\varphi\right]}$$

~~[illegible]~~. AS по $(\rho\mu)$

$$\boxed{T^\mu_\alpha = \Theta^\mu_\alpha - \partial_\rho Y^{\rho\mu}_\alpha}$$ – Утверждается, что симметричен! Докажем это.

На уравнениях движения

Не AS по $(\mu\alpha)$!

$$T_{\mu\alpha} - T_{\alpha\mu} = \Theta_{\mu\alpha} - \Theta_{\alpha\mu} + \partial_\rho Y_{\rho\mu\alpha} - \cancel{\partial_\rho Y_{\rho\alpha\mu}} =$$

$\|$

0

ok

$$= \pi_\mu \partial_\alpha \varphi - \pi_\alpha \partial_\mu \varphi + \frac{i}{2}\partial_\rho \left(2\cancel{\pi_\rho} S^\mu_\alpha \varphi - \pi^\mu \cancel{S_{\rho\alpha}\varphi} - \pi_\alpha \cancel{S_{\rho\mu}\varphi}\right)$$

$$\cancel{i\,\partial_\mu(\pi^\mu S_{\mu\alpha}\varphi)} + \frac{i}{2}\partial_\rho\left(\cancel{\pi_\rho S^\alpha_\mu}\varphi - \pi^\alpha \cancel{S_{\rho\mu}\varphi} - \cancel{\pi_\mu S_{\rho\alpha}\varphi}\right)$$

$$\partial_\mu M_{\mu\nu\alpha} = 0 = -x_\nu \partial_\mu \Theta^\mu_\alpha + x_\lambda \partial_\mu \Theta^\mu_\nu -$$

$$- \Theta^\nu_\alpha + \Theta^\lambda_\nu + i\,\partial_\mu(\pi^\mu S_{\nu\lambda}\varphi)$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\Theta^\lambda_\nu - \Theta^\nu_\lambda = i\,\partial_\mu(\pi^\mu S_{\nu\lambda}\varphi)}$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}$$

Итак, $\boxed{T_{\mu\alpha} - T_{\alpha\mu} = 0}$ на уравнениях движения

$\boxed{\text{Конформный ток}}$

$$J^\mu_\alpha = (2x^\alpha x^\lambda - x^2\eta^{\lambda\alpha})(T^\mu_\lambda) +$$

$$+ \boxed{\partial_\rho\{(2x^\alpha x^\lambda - x^2\eta^{\lambda\alpha})\, Y^{\rho\mu}{}_\alpha\}} +$$

Сохранится тождественно!

$$+ 2(\eta_{\alpha\nu}\Delta + i \cancel{S_{\alpha\nu}})\varphi\pi^\mu x^\nu$$

$$-\partial_\rho(2x^\alpha x^\lambda - x^2\eta^{\lambda\alpha})\, Y^{\rho\mu}{}_\lambda$$

$$\boxed{(-2\delta^\alpha_\rho x^\lambda - 2\delta^\lambda_\rho x^\alpha + 2x_\rho\eta^{\lambda\alpha})\left(\frac{i}{2}\right)\times (-\pi^\rho S^\mu{}_\lambda + \pi^\mu S^\rho{}_\lambda + \pi_\lambda S^{\rho\mu})\varphi}$$

$$i\big(\cancel{\pi^\alpha x^\lambda S^\mu{}_\lambda} - 2\pi^\mu S_{\alpha\lambda} x^\lambda - \cancel{\pi_\lambda x^\lambda S_{\alpha\mu}}$$

$$+ 2\pi^\lambda x^\alpha S^\mu{}_\lambda - \cancel{\pi^\mu S^\rho{}_\rho} - \cancel{\pi_\lambda x^\alpha S^{\lambda\mu}}$$

$$- \cancel{x^\rho \pi^\rho S_{\mu\alpha}} + \cancel{x^\rho \pi^\mu S_{\rho\alpha}} + \cancel{\pi_\alpha x^\rho S_{\rho\mu}}\big)$$

$$2i\big(-\cancel{\pi^\mu S_{\alpha\lambda} x^\lambda} + \pi^\lambda x^\alpha S_{\mu\lambda} - \cancel{\pi_\lambda x^\lambda S}$$

$$J^\mu_\alpha = \left(2x^\alpha x^\lambda - x^2\eta^{\alpha\lambda}\right)T^\mu_\lambda +$$

$$+\, 2\left(\cancel{\eta_{\alpha\nu}}\,\underbrace{\Delta\,\varphi\,\pi^\mu}\,x^\alpha\right) + 2\,\underbrace{i\,\pi_\lambda}\,x_\alpha\,S_{\mu\lambda}\,\varphi$$

$$\boxed{\tilde V_\mu = \Delta\,\pi^\mu\varphi - Y^{\lambda\mu}{}_\lambda}$$

$$Y^{\lambda\mu}{}_\lambda = \frac{i}{\cancel{2}}\left(\cancel{-\pi^\rho S^\mu{}_\rho} + \cancel{\pi^\mu S^\rho{}_\rho}^{\,0} + \cancel{2}\,\pi_\rho S^{\rho\mu}\right)\varphi$$

$$\boxed{\tilde V_\mu = \underbrace{\Delta\,\pi^\mu\varphi} - i\,\underbrace{\pi_\rho S^{\rho\mu}\varphi}}$$

$$\boxed{J^\mu_\alpha = \left(2x^\alpha x^\lambda - x^2\eta^{\alpha\lambda}\right)T^\mu_\lambda + 2x^\alpha V_\mu}$$

$$\partial_\mu J^\mu_\alpha = \cancel{2\,\delta^\alpha_\mu x^\lambda T^\mu_\lambda} + 2\,\delta^\lambda_\mu\, x^\alpha T^\mu_\lambda -$$

$$- \cancel{2x^\mu\,\eta^{\alpha\lambda}\,T^\mu_\lambda} + 2\,\delta^\alpha_\mu V_\mu + 2x^\alpha\partial_\mu V_\mu$$

$$= 2x^\alpha T^\lambda{}_\lambda + 2x^\alpha\partial_\mu V_\mu + 2V_\alpha$$

$\boxed{\text{Теория конформна если } V_\alpha = 0}$

$$\boxed{T^\mu_\mu = -\partial_\mu V_\mu} \Rightarrow \boxed{\partial_\mu J^\mu_\alpha = 2V_\alpha} \quad \boxed{T^\alpha_\alpha = 0}$$

Задача

Пусть $\boxed{V_\mu = \partial_\alpha L_{\alpha\mu}}$ — $\boxed{\text{Часть вириала.}}$

Тогда $\quad \partial_\mu J^\mu_D = 0 \Rightarrow \quad T^\mu_\mu + \partial_\mu \partial_\alpha L_{\alpha\mu} = 0$

$\boxed{\text{Улучшенный ТЭИ.}}$ $\qquad \boxed{A_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha})}$

$$\hat{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{1}{D-2}\Big(\partial_\mu \partial_\alpha L^\alpha_{(\alpha\nu)} + \partial_\nu \partial_\alpha L^\alpha_{(\alpha\mu)} - \partial^2 L_{(\mu\nu)} - g_{\mu\nu}\partial_\alpha \partial_\beta L^{\alpha\beta}\Big)$$

$$+ \frac{1}{(D-2)(D-1)}\Big(g_{\mu\nu}\,\partial^2 L^\alpha_{\alpha\alpha} - \partial_\mu \partial_\nu L^\alpha_{\alpha\alpha}\Big), \quad D \geq 3$$

Решение

$$\partial_\mu \hat{T}_{\mu\nu} = \underbrace{\partial_\mu T_{\mu\nu}}_{0} + \frac{1}{D-2}\Big(\tfrac{1}{2}\partial^2 \partial_\alpha L^\alpha_{\alpha\nu} + \cancel{\tfrac{1}{2}\partial_\nu \partial_\alpha \partial_\mu L_{\alpha\mu}} + \tfrac{1}{2}\partial^2 \partial_\alpha L_{\nu\alpha} + \cancel{\tfrac{1}{2}\partial_\nu \partial_\alpha \partial_\mu L_{\mu\alpha}}$$

$$- \frac{\partial^2 \partial_\mu}{2}\big(\cancel{L_{\mu\nu}} + \cancel{L_{\nu\mu}}\big) - \cancel{g_{\mu\nu}\partial_\mu \partial_\alpha \partial_\beta L_{\alpha\beta}}\Big)$$

$$+ \frac{1}{(D-2)(D-1)}\Big(\cancel{\partial_\nu \partial^2 L_{\alpha\alpha}} - \cancel{\partial^2 \partial_\nu L_{\alpha\alpha}}\Big)$$

$$= -\frac{1}{D-2}\,\frac{\partial^2 \partial_\alpha}{2}\big(L_{\alpha\nu} - L_{\nu\alpha}\big)$$

$$\hat{T}^\mu_\mu = T^\mu_\mu + \frac{1}{D-2}\Big(2\partial_\mu \partial_\alpha L_{\alpha\mu} + \cancel{\partial_\mu \partial_\alpha L_{\alpha\mu}} - \cancel{\partial^2 L_{\mu\mu}} - D\,\partial_\alpha \partial_\beta L_{\alpha\beta}\Big)$$

$$\cancel{+ \frac{1}{(D-2)(D-1)}\Big(D\,\partial^2 L_{\alpha\alpha} - \partial^2 L_{\alpha\alpha}\Big)}$$

$$= T^\mu_\mu + \partial_\alpha \partial_\beta L_{\alpha\beta} \equiv 0$$

$\boxed{\text{по сохранению дилатационного тока}}$

$\boxed{\text{Д/3}}$ Показать, что безмассовое, классическое скалярное поле

конформно-инвариантно в любой размерности. $D \geq 3$.

Какой пот-л можно добавить? Найти улучшенный ТЭИ.

Решение $\quad S = -\int d^D x \; \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2$

$$\left.\begin{aligned} x &\mapsto \lambda x = x' \\ \varphi &\mapsto \lambda^{-\Delta} \varphi = \varphi'(x') \end{aligned}\right] \quad S \mapsto -\frac{1}{2}\int d^D x \, \lambda^{D-2} \lambda^{-2\Delta} (\partial_\mu \varphi)^2$$

$$\Downarrow$$

$$2\Delta = D-2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta = \frac{(D-2)}{2}}$$

$$\theta^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L} = -\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial \varphi)^2$$

$$\partial_\mu \theta^\mu_\nu = \cancel{-\Box\varphi \, \partial_\nu \varphi}^{\,0} - \cancel{\partial_\mu \varphi \, \partial_\mu} \partial_\nu \varphi + \cancel{\partial_\lambda \varphi \, \partial_\nu} \partial_\lambda \varphi = 0 \quad \text{на ур-иях движения}$$

$$\theta^\mu_\mu = -(\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{D}{2} (\partial \varphi)^2 = \frac{D-2}{2} (\partial \varphi)^2 \neq 0$$

Дилатонный ток $\quad J^\mu_D = \theta^\mu_\nu x^\nu + \Delta \pi^\mu \varphi =$

$$= \quad \pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = -\partial_\mu \varphi$$

$$\boxed{J^\mu_D = \theta^\mu_\nu x^\nu - \Delta \partial_\mu \varphi \cdot \varphi} \qquad \boxed{V^\mu = -\Delta \partial_\mu \varphi \cdot \varphi}$$

$$\partial_\mu J^\mu_D = \cancel{\partial_\mu \theta^\mu_\nu}^{\,0} x^\nu + \theta^\mu_\mu - \Delta \cancel{\partial_\mu \partial_\mu \varphi}^{\,0} \cdot \varphi - \Delta (\partial_\mu \varphi)^2 = 0$$

$$\theta^\mu_\mu = \frac{D-2}{2} (\partial \varphi)^2$$

если $\boxed{\Delta = \frac{D-2}{2}}$

$$V_\mu = \partial_\alpha L_{\alpha\nu} = -\frac{\Delta}{2}\partial_\alpha(\eta_{\alpha\nu}\varphi^2)$$

$$\boxed{L_{\mu\nu} = -\frac{\Delta}{2}\eta_{\mu\nu}\varphi^2}$$

$$\hat T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{\Delta/2}{D-2}\Big(\underbrace{\tfrac12(\partial_\mu\partial_\nu\varphi^2)}\big(+\tfrac{\Delta}{2}\cancel{\eta_{\alpha\nu}}\big) + \cancel{(\partial_\nu\partial_\mu\varphi^2)\big(+\tfrac{\Delta}{2}\eta_{\alpha\mu}\big)}$$

$$\underbrace{-\tfrac12\partial^2(\varphi^2)\big(+\tfrac{\Delta}{2}\eta_{\mu\nu}\big)} - \cancel{\eta_{\mu\nu}\partial^2(\varphi^2)\big(+\tfrac{\Delta}{2}\eta_{\alpha\beta}\big)}\Big) +$$

$$+\frac{\Delta/2\,D}{(D-1)(D-2)}\Big(\underbrace{\eta_{\mu\nu}\partial^2\varphi^2}\big(+\cancel{D\tfrac{\Delta}{2}}\big) - \underbrace{\partial_\mu\partial_\nu\varphi^2}\big(+\tfrac{\Delta}{2}D\big)\Big)$$

$$= T_{\mu\nu} + \frac{\Delta/2}{(D-1)\cancel{(D-2)}}\Big[(\partial_\mu\partial_\nu\varphi^2)\big(\cancel{\tfrac{D-1}{2}} - \tfrac{D}{2}\big) + \eta_{\mu\nu}\partial^2\varphi^2\big(+\cancel{\tfrac{D-2}{2}} + \tfrac{D}{2}\big)\Big]$$

$$\boxed{\hat T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{\Delta/2}{D-1}\left(\partial_\mu\partial_\nu\varphi^2 - \eta_{\mu\nu}\partial^2\varphi^2\right)}$$

$$-\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + \tfrac12\eta_{\mu\nu}(\partial\varphi)^2$$

$$\partial^2\varphi^2 = \partial_\mu(2\partial_\mu\varphi\varphi) = 2\partial^2\varphi + 2(\partial\varphi)^2$$

$$\partial_\mu\hat T_{\mu\nu} = \partial_\mu T_{\mu\nu} + \frac{\Delta/2}{D-1}\left(\partial^2\partial_\nu\varphi^2 - \partial_\nu\partial^2\varphi^2\right) \equiv \partial_\mu T_{\mu\nu} = 0$$

$$T_{\mu\mu} = \frac{D-2}{2}(\partial\varphi)^2 + \overbrace{\frac{\Delta/2}{D-1}\left(\partial^2\varphi^2 - D\partial^2\varphi^2\right)}^{(D-2)/4} = 0 \quad \text{ok}$$

$$-\frac{D-2}{4}\partial^2\varphi^2 \xrightarrow{\partial^2\varphi^2} 2(\partial\varphi)^2$$

на ур-ниях

Потенциал $V(\varphi) = \varphi^{\alpha}$

$$d^D x\, V(\varphi) \mapsto \underbrace{\lambda^{-\Delta\alpha}\lambda^{D}}_{\Downarrow} d^D x\, V(\varphi)$$

$$\Delta\alpha = D \qquad \boxed{\alpha = \frac{D}{\Delta} = \frac{2D}{D-2}}$$