CFT–3
(весна 2014)

Формулы, $D = 2$

1. Скалярное поле на окружности:
$S_M = g\int d^2x\,(\partial_\mu\varphi)^2/2$
$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi_0 t}{gL} + \frac{i}{\sqrt{4\pi g}}\sum_{n\neq0}\frac{1}{n}\times$$
$$\times\left(a_n \mathrm{e}^{-2\pi i n(t-x)/L} + \bar{a}_n \mathrm{e}^{-2\pi i n(t+x)/L}\right)$$
$$H = \frac{\pi_0^2}{2Lg} + \frac{2\pi}{L}\sum_{n\neq0}(a_n a_{-n} + \bar{a}_n\bar{a}_{-n})$$
$[a_n,\,a_m] = [\bar{a}_n,\,\bar{a}_m] = n\delta_{n+m}$

2. Скалярное поле на плоскости:
$z = \mathrm{e}^{2\pi i(t-x)/L}$, $\bar{z} = \mathrm{e}^{2\pi i(t+x)/L}$
$$\varphi(z,\bar{z}) = \varphi_0 + \frac{i\pi_0}{4\pi g}\ln(z\bar{z})$$
$$+\frac{i}{\sqrt{4\pi g}}\sum_{n\neq0}\frac{1}{n}\left(a_n z^{-n} + \bar{a}_n\bar{z}^{-n}\right)$$
$L_n = \frac{1}{2}\sum\limits_m a_m a_{n-m}$, $n \neq 0$
$L_0 = \frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n>0} a_{-n}a_n$
$H = \frac{4\pi}{L}(L_0 + \bar{L}_0)$
$a_n|0\rangle = \bar{a}_n|0\rangle = 0$, $n \geq 0$.

3. Вертекс:
$V_k =: \mathrm{e}^{ik\varphi}: \qquad h = \bar{h} = \frac{k^2}{8\pi g}$
$V_k V_q = \delta_{k+q}\,|z-w|^{-k^2/2\pi g} + \ldots$

4. Нормальное упорядочивание:
$$(AB)(w) = \lim_{z\to0}\mathrm{Reg}\,[A(z)B(w)] = \frac{1}{2\pi i}\oint_w \frac{dz}{z-w}\,A(z)B(w)$$
$(AB) \neq (BA)$

5. Поля–потомки:
$T(z) = \sum\limits_m (z-w)^{-m-2}L_m(w)$
$\varphi^{(-n)} = (L_{-n}\varphi)(w)$
$\langle\varphi^{(-n)}(w)\,X\rangle = \mathcal{L}_{-n}\langle\varphi(w)X\rangle$
$$\mathcal{L}_{-n} = \sum_i\left[\frac{h_i(n-1)}{(z_i-w)^n} - \frac{\partial_i}{(z_i-w)^{n-1}}\right]$$

6. Уравнения bootstrap:
$\langle\varphi_p\varphi_q\rangle = \frac{\delta_{pq}}{z_{pq}^{2h_p}\bar{z}_{pq}^{2\bar{h}_p}}$
$$\varphi_1(z,\bar{z})\varphi_2(0,0) = \sum_{p,k,\bar{k}} C_{12}^{p\{k,\bar{k}\}} z^{h_p-h_1-h_2+k}\times$$
$$\times\,\bar{z}^{\bar{h}_p-\bar{h}_1-\bar{h}_2+\bar{k}}\,\varphi_p^{\{k,\bar{k}\}}(0,0)$$
$\langle\varphi_p|\varphi_1(1,1)|\varphi_2\rangle = C_{p12} = C_{12}^{p(0,0)} \equiv C_{12}^p$
$C_{12}^{p\{k,\bar{k}\}} = C_{p12}\cdot\beta_{12}^{p\{k\}}\cdot\bar{\beta}_{12}^{p\{\bar{k}\}}$
Конформный блок:
$$\mathcal{F}_{34}^{12}(p|\eta) = \sum_{\{k\}}\eta^{K+h_p-h_3-h_4}\frac{\langle\varphi_1|\varphi_2(1)|\varphi_p^{\{k\}}\rangle}{\langle\varphi_1|\varphi_2(1)|\varphi_p\rangle}$$
$K = \sum\limits_i k_i$
Уравнения:
$$\langle\varphi_1|\varphi_2(1,1)\varphi_3(\eta,\bar{\eta})|\varphi_4\rangle = \sum_p C_{34}^p C_{12}^p\mathcal{F}_{12}^{34}(p|\eta)\bar{\mathcal{F}}_{12}^{34}(p|\bar{\eta}) = \sum_p C_{41}^p C_{32}^p\mathcal{F}_{32}^{41}(p|1-\eta)\bar{\mathcal{F}}_{32}^{41}(p|1-\bar{\eta})$$

7. AdS/CFT соответствие: $D = 4$
IIB суперструны в AdS_5
$\longleftrightarrow \mathcal{N} = 4$ SYM в M_4
Константы: g_s, α', $L_{AdS} \longleftrightarrow N$, g_{YM}
$\lambda \equiv g_{YM}^2 N, \quad M_{Pl}^{-8} \equiv 2^6\pi^7 g_s^2\alpha'^4$
$g_s = g_{YM}^2/(4\pi), \quad L_{AdS} = \alpha'\lambda^{1/4}$
SUGRA в AdS_5: $N\to\infty$, $\lambda \gg 1$
AdS_5: $ds^2 = L_{AdS}^2(dx_\mu^2 - dz^2)/z^2$
Инверсия в AdS_5:
$x^\mu \to x^\mu/(x_\mu^2 - z^2), \quad z \to z/(x_\mu^2 - z^2)$
Скалярное поле:
$$S = \frac{1}{2}\int d^5x\sqrt{|g|}\left[g^{AB}\partial_A\Phi\partial_B\Phi - m^2\Phi^2\right]$$
$z\to0$: $\Phi \to z^{4-\Delta}\bar{\Phi}(x)$, $\Delta(\Delta-4) = m^2$
$z\to\infty$: $\Phi \to 0$
$$\Phi = \frac{(\Delta-1)(\Delta-2)}{\pi^2}\int d^4y\left(\frac{z}{z^2+(x-y)^2}\right)^{\Delta}\bar{\Phi}(y)$$
Соответствие: $S_{\mathrm{eff},CFT}[\Phi] = S[\Phi[\bar{\Phi}]]$

Задачи

1. Выразить гамильтониан 1 через операторы рождения–уничтожения a_n, $\bar{a}_n$. Вывести комутационные соотношения между этими операторами.

2. Вычислить вес $\bar{h}$ оператора V_k.

3. Вычислить OPE $T(z)V_k(w, \bar{w})$.

4. Пусть A и B — линейные комбинации операторов рождения–уничтожения a_n, $\bar{a}_n$. Доказать соотношение
$$: \mathrm{e}^{A} : : \mathrm{e}^{B} : = : \mathrm{e}^{A+B} : \ \mathrm{e}^{\langle AB \rangle} \ , \tag{1}$$
где $\langle AB \rangle$ — вакуумное ожидание произведения операторов.

5. Используя формулу (1), получить OPE $V_k(z, \bar{z})V_q(w, \bar{w})$.

6. Вычислить конформную размерность состояния $a_{-m_1}a_{-m_2}|0\rangle$.

7. Вычислить $\langle \varphi^{(-2)}(w)\partial\varphi(z) \rangle$.