

CFT-3

(весна 2014)

Формулы, $D = 2$

1. Майорановский фермион.

(a) Пространство Минковского:

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= -i\tau^2, \quad \gamma^1 = \tau^1 \\ \Psi^C &\equiv C\Psi^* = \Psi, \quad C = \gamma^0\gamma^1 \\ S_M &= -\frac{g}{2} \int d^2x i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi\end{aligned}$$

(b) Пространство Евклида:

$$\begin{aligned}\Psi &= \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} \\ S_E &= ig \int d^2x (\psi\bar{\partial}\psi + \bar{\psi}\partial\bar{\psi}) \\ \psi &: \quad (h, \bar{h}) = (1/2, 0) \\ \bar{\psi} &: \quad (h, \bar{h}) = (0, 1/2) \\ \langle\psi(z)\psi(z')\rangle &= \frac{1}{2\pi ig(z-z')} \\ \langle\bar{\psi}(\bar{z})\bar{\psi}(\bar{z}')\rangle &= \frac{1}{2\pi ig(\bar{z}-\bar{z}')} \\ T(z) &= -i\pi g : \psi\partial\psi : \\ \bar{T}(\bar{z}) &= -i\pi g : \bar{\psi}\bar{\partial}\bar{\psi} : \\ T(z)T(w) &\sim \frac{1/4}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w}\end{aligned}$$

2. Преобразование ТЭИ:

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon T &= -2T\partial\epsilon - \epsilon\partial T - c\partial^3\epsilon/12 \\ T'(w) &= \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-2} \left(T(z) - \frac{c}{12}\{w; z\}\right) \\ &= \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-2} T(z) + \frac{c}{12}\{z; w\} \\ \{w; z\} &= \frac{d^3w/dz^3}{dw/dz} - \frac{3}{2} \left(\frac{d^2w/dz^2}{dw/dz}\right)^2\end{aligned}$$

3. Гильбертово пространство:

$$\begin{aligned}z &= e^{\tau+2\pi i\sigma/L}, \quad \bar{z} = e^{\tau-2\pi i\sigma/L} \\ |\varphi_{in}\rangle &= \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \varphi(z, \bar{z})|0\rangle \\ z^\dagger &= 1/\bar{z} \\ [\varphi(z, \bar{z})]^\dagger &= \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \varphi(1/\bar{z}, 1/z) \\ \langle\varphi_{out}| &= \lim_{z, \bar{z} \rightarrow \infty} \langle 0| [\varphi(z, \bar{z})]^\dagger \\ \langle\varphi_{out}|\varphi_{in}\rangle &= C_\varphi\end{aligned}$$

4. Операторный формализм:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} \varphi_1(z)\varphi_2(w) &= \begin{cases} \varphi_1(z)\varphi_2(w), & |z| > |w| \\ \varphi_2(w)\varphi_1(z), & |w| > |z| \end{cases} \\ Q_i &= \oint dz j_i(z)\end{aligned}$$

$$[Q_1, b(w)] = \mathcal{R} \oint_w dz j(z)b(w)$$

5. Генератор конформных преобразований:

$$\begin{aligned}[Q_1, Q_2] &= \mathcal{R} \oint dw \oint dz j_1(z)j_2(w) \\ Q &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \epsilon(z)T(z) \\ \delta_\epsilon\varphi &= -[Q, \varphi]\end{aligned}$$

6. ОРЕ для ТЭИ:

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w}$$

7. Разложение по модам:

$$\begin{aligned}\varphi(z, \bar{z}) &= \sum_{mn} z^{-m-h} \bar{z}^{-n-\bar{h}} \varphi_{mn} \\ \varphi_{mn} &= \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+h-1} \oint \frac{d\bar{z}}{(-2\pi i)} \bar{z}^{n+\bar{h}-1} \varphi(z, \bar{z}) \\ \varphi_{m,n}^\dagger &= \varphi_{-n,-m} \\ \varphi_{mn}|0\rangle &= 0, \quad m > -h, \quad n > -\bar{h}\end{aligned}$$

8. Алгебра Вирасоро:

$$\begin{aligned}T(z) &= \sum_m z^{-m-2} L_m \\ \bar{T}(\bar{z}) &= \sum_{\bar{m}} \bar{z}^{-\bar{m}-2} \bar{L}_{\bar{m}} \\ L_m &= \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} T(z) \\ [L_m, L_{m'}] &= \frac{c(m^3-m)}{12} \delta_{m+m'} + L_{m+m'}(m-m')\end{aligned}$$

9. «Стационарные» состояния:

$$\begin{aligned}|h, \bar{h}\rangle &= \varphi_{h\bar{h}}(0, 0)|\rangle \\ L_0|h, \bar{h}\rangle &= h|h, \bar{h}\rangle, \quad \bar{L}_0|h, \bar{h}\rangle = \bar{h}|h, \bar{h}\rangle \\ L_{-n}|h, \bar{h}\rangle &= |h+n, \bar{h}\rangle\end{aligned}$$

10. Модуль Верма:

$$\begin{aligned}L_n|0\rangle &= 0, \quad n \geq -1 \\ |h=5\rangle &= L_{-2}L_{-3}|0\rangle\end{aligned}$$

Задачи

1. Найти матрицу зарядового сопряжения двумерных фермионов C из условия $j_\mu^C = -j_\mu$, где j_μ – электрический ток.
2. В модели 1 вычислить ОРЕ $\psi(z)\psi(w)$, $\psi(z)\partial\psi(w)$.
3. Вычислить ОРЕ $\bar{T}(\bar{z})\bar{\psi}(\bar{w})$.
4. Вычислить веса полей ψ и $\bar{\psi}$, рассматривая тождества Уорда

$$\begin{aligned} 2\langle T_{z\bar{z}}(x)\bar{\psi}(x') \rangle &= -\delta^2(x-x')\bar{h}_{\bar{\psi}}\langle\bar{\psi}(x)\rangle \\ 2\langle T_{\bar{z}z}(x)\psi(x') \rangle &= -\delta^2(x-x')h_\psi\langle\psi(x)\rangle \end{aligned}$$

5. Доказать свойство производной Шварца:

$$\{u; z\} = \{w; z\} + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 \{u; w\} .$$

6. Доказать групповое свойство преобразования ТЭИ: комбинация преобразований $z \rightarrow w(z) \rightarrow u(w(z))$ приводит к тому же результату, что и прямое преобразование $z \rightarrow u(w(z))$.
7. Показать, что производная Шварца от глобального конформного преобразования равна нулю.
8. Вычислить вакуумное среднее ТЭИ конформной теории на двумерном конусе с углом раствора α .
9. Показать, что генератор конформных преобразований 5 представим в виде $Q = \sum_m \epsilon_m L_m$, где $\epsilon(z) = \sum_m z^{m+1} \epsilon_m$.
10. Проверить формулу обратного преобразования 7.
11. Вычислить $[\bar{L}_n, \bar{L}_{n'}]$.
12. Показать, что L_{-1} , L_0 , L_1 соответствуют сдвигам, дилатациям и специальным конформным преобразованиям.
13. Вывести коммутационное соотношение

$$[L_m, \varphi_{m'}] = (m(h-1) - m') \varphi_{m+m'} .$$