Евклидовы классические решения и туннелирование.

Квантовая механика одной переменной: Изучаем туннелирование частицы массы M в одномерном потенциале $V(q)$ в квазиклассическом приближении из метастабильного основного состояния. Пусть потенциал имеет минимум в точке q_0 ($U(q_0)=0$, $U'(q_0)=0$, $U''(q_0)>0$) и нуль в точке q_1 ($U(q_1)=0$, $U'(q_1)\neq 0$). Вероятность протуннелировать дается квадратом модуля волновой функции в точке q_1, который в квазиклассике определяется действием на отскоковом решении. Отскок (bounce) – решение евклидовых (в мнимом времени $\tau = it$ или в перевернутом потенциале $(-V(q))$) уравнений движения:

— с нулевой евклидовой энергией $\mathcal{E} = \dfrac{M}{2}\left(\dfrac{dq}{d\tau}\right)^2 - V(q) = 0$;

— стартующее из метастабильного вакуума q_0 при $\tau = -\infty$;

— имеющее точку поворота $q(0) = q_1$, $\left.\dfrac{dq}{d\tau}\right|_{q_1} = 0$.

Евклидов пузырь. Аналогичные соображения для системы с бесконечным числом степеней свободы — теории поля — приводят к поиску решений евклидовых уравнений поля (с метрикой $\mathrm{diag}(1,1,1,1)$) с $\mathcal{E}=0$, описывающих процесс туннелирования, неоднородный в пространстве. Будем интересоваться квазиклассической вероятностью туннелирования из ложного вакуума в истинный. Соответствующая конфигурация имеет вид пузыря в евклидовом пространстве, внутри которого поле стремится к истинному вакууму ϕ_1, а снаружи – к ложному ϕ_0.

Достижение точки поворота, $\dfrac{d\phi}{d\tau} = 0$ для всех $\mathbf{x}$ при $\tau = 0$, и одновременно $\phi \to \phi_0$ при $\tau \to \pm\infty$, наблюдается, в частности, для сферически симметричных гладких полей $\phi(r)$, где $r = \sqrt{\tau^2 + \mathbf{x}^2}$ и $\phi \to \phi_0$ при $r \to \infty$. Существование отскокового решения можно доказать, воспользовавшись механической аналогией – считая r “временем”, рассмотреть движение частицы в перевернутом потенциале с трением, убывающим со временем.

Тонкая стенка. Пусть потенциал имеет вид

$$V(\phi) = V_0(\phi) - \epsilon V_1(\phi), \tag{1}$$

где V_0 симметричен относительно замены $\phi \leftrightarrow -\phi$ и имеет вырожденные минимумы $\pm\phi_0$, а V_1 его “перекашивает”, $V_0(\pm\phi_0) = 0$, $V_1(-\phi_0) = 0$, $V_1(+\phi_0) = 1$, ϵ – малый параметр размерности плотности энергии. Интересуемся туннелированием из ложного вакуума $\approx -\phi_0$ в истинный $\approx +\phi_0$. Будем искать сферически симметричный евклидов пузырь, воспользовавшись механической аналогией (см. выше). Воображаемая частица стартует из окрестности более высокого горба с нулевой скоростью, так что в основном движение происходит при больших r, когда трение мало. Если пренебречь членом, содержащим ϕ', получим уравнение и граничные условия для одномерного антикинка с произвольным центром R (оно соответствует пузырю радиуса R с тонкой стенкой). Радиус найдем, минимизируя евклидово действие по R:

$$S_B(R) \approx 2\pi^2 \mu R^3 - \frac{\pi^2}{2}\epsilon R^4, \quad \text{где} \quad \mu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dr\, \left(\frac{1}{2}\left(\phi'(r)\right)^2 + V_0(\phi(r))\right)$$

(второй член – вклад внутренности пузыря, а первый – вклад стенки). Экстремум соответствует $R_B = 3\mu/\epsilon$.

Движение после материализации происходит по аналитически продолженному в обычное время, то есть в пространство Минковского, отскоковому решению. r заменяется на $\sqrt{\mathbf{x}^2 - t^2}$, так что поверхности постоянного ϕ – гиперболоиды в пространстве–времени. Это означает, что для покоящегося наблюдателя область истинного вакуума расширяется, причем скорость стенки со временем приближается к скорости света.

Критический пузырь (сфалерон) – неустойчивое решение статических уравнений поля, определяющее высоту барьера, разделяющего истинный и ложный вакуумы. Статическое уравнение поля имеет вид евклидова уравнения поля в пространстве с размерностью $(d-1)$, так что критический пузырь в $(d-1)$-мерии совпадает с отскоковым решением в d-мерии.

Литература:

В.А. Рубаков, ч.2, §11.1, 12.1, 12.2, 12.3;

Задачи.

1. Пусть частица массы M движется в потенциале $V(q) = \frac{\mu^2}{2}q^2 - \frac{\lambda}{3}q^3$. При каких M, μ, λ работает квазиклассическое приближение? Можно ли при таких параметрах использовать теорию возмущений для учета поправок к основному метастабильному состоянию от ангармоничности (для этого может понадобиться привести значение поправки с точностью до второго порядка)? Найти зависимость S_B от M, μ, λ. Для этого примера оценить отброшенные на лекции вклады и обосновать сделанные приближения.

2. Рассмотрим[1] квантовую механику двух переменных, $\mathbf{q} = (x, y)$. Пусть потенциал имеет вид

$$V(x, y) = \frac{\mu^2}{2}y^2 + U(x),$$

   где $U(x)$ имеет минимум в точке x_0 ($U(x_0) = 0$, $U'(x_0) = 0$, $U''(x_0 > 0)$ и нуль в точке x_1 ($U(x_1) = 0$, $U'(x_1) \neq 0$).

   (a) Найти отскоковое решение и точку поворота.

   (b) Найти вблизи точки поворота форму линии $V(x, y) = 0$ на плоскости (x, y).

   (c) Найти классические решения, близкие к отскоковому.

   (d) Найти каустику вблизи точки поворота.

   (e) Воспользовавшись тем, что переменные в потенциале разделяются, решить в квазиклассическом приближении уравнение Шредингера, найти волновую функцию в запрещенной области между каустикой и линией $V = 0$ и убедиться, что минимум $|\psi(x)|^2$ при $V = 0$ достигается в точке поворота.

3. Показать, что критический пузырь неустойчив, и среди возмущений вокруг него имеется отрицательная мода.

[1] Необязательная задача, для ее решения полезно изучить §11.2 книги В.А. Рубакова.