## Вихрь.

Рассмотрим абелеву модель Хиггса в (2+1)-мерном пространстве–времени. Потенциал можно записать как

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2}\left(|\phi|^2 - v^2\right)^2 .$$

Интересуемся статическими солитонами в калибровке $A_0 = 0$. Конечность энергии означает, что $|\phi| \to v$ при $|\mathbf{x}| \to \infty$. Фаза может быть при этом различной; с точностью до несингулярных калибровочных преобразований возможные асимптотики суть $\phi \to v\mathrm{e}^{in\varphi}$, где $n$ – целое число, которое характеризует число наматываний при отображении множества пространственных бесконечностей (окружности бесконечного радиуса в пространстве координат) в множество вакуумов (окружность радиуса $v$ в пространстве полей $\phi$). В секторе с $n = 1$ будем искать решение, инвариантное относительно пространственных вращений, дополненных калибровочными преобразованиями. Наиболее общая такая подстановка, с точностью до добавления чистой калибровки:

$$\begin{aligned} \phi(r,\varphi) &= v\mathrm{e}^{i\varphi}F(r), \\ A_i(r,\varphi) &= -\frac{1}{er}\epsilon_{ij}n_jA(r). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $r$ и $\varphi$ – полярные координаты на плоскости $\mathbf{x}$, $n_j$ – единичный вектор, направленный в точку $\mathbf{x}$. Конечность энергии и гладкость при $r = 0$ приводят к граничным условиям:

$$\begin{array}{lll} F(r) \to 1, & A(r) \to 1 & \quad r \to \infty, \\ F(r) \to 0, & A(r) \to 0 & \quad r \to 0, \end{array} \tag{2}$$

а уравнения поля сводятся к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям на функции $F$ и $A$:

$$-\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dA}{dr}\right) - 2e^2v^2\frac{F^2}{r}(1-A) = 0\ , \tag{3}$$

$$-\frac{d}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}\right) + \lambda v^2 rF(F^2-1) + \frac{F}{r}(1-A)^2 = 0\ . \tag{4}$$

Решение системы (3), (4), (2) — солитон в топологическом секторе $n = 1$ — вихрь.

Массу солитона можно оценить из размерных соображений. Введем новые переменные ($m_V = \sqrt{2}ev$ и $m_H = \sqrt{2\lambda}v$ – массы векторного и скалярного малых возбуждений около вакуума):

$$\mathbf{y} = m_V\mathbf{x}, \qquad \phi(\mathbf{x}) = v\tilde{\phi}(\mathbf{y}), \qquad A_i(\mathbf{x}) = \frac{m_V}{e}\tilde{A}_i(\mathbf{y}).$$

Тогда энергия

$$E = \frac{m_V^2}{e^2}\int d^2y\,\left(\frac{1}{4}\tilde{F}_{ij}^2 + \frac{1}{2}|\tilde{D}_i\tilde{\phi}|^2 + \frac{1}{8}\frac{m_H^2}{m_V^2}\left(|\tilde{\phi}|^2 - 1\right)^2\right).$$

Считая $m_V \sim m_H$, а все безразмерные поля порядка единицы, оцениваем $M_{\mathrm{sol}} \sim m_V^2/e^2 \sim v^2$, а характерный размер солитона $y \sim 1$, то есть $r_{\mathrm{sol}} \sim 1/m_V$.

**Литература:**

Рубаков, ч.1, §5.1, 5.2, 6.1.
Ландау, Лившиц, т.9 §§44-48
Шварц, §I.5.
Vilenkin, Shellard, 1994.

## Задачи.

1. Рассмотреть случай $m_H \gg m_V$. Показать, что область, где $|\phi|$ существенно отличается от $v$, т. е. $(|\phi| - v) \sim v$, имеет размер порядка $1/m_H$, а область, где $A(r)$ существенно отличается от единицы, имеет размер порядка $1/m_V$. Таким образом, солитон имеет маленький скалярный кор и относительно большой векторный кор. Найти асимптотику функции $A(r)$ вне векторного кора ($r \gg 1/m_V$). Показать, что вне скалярного кора ($r \gg 1/m_H$, но не обязательно $r \gg 1/m_V$) поле $B_i = (A_i + \frac{1}{er}\varepsilon_{ij}n_j)$ удовлетворяет уравнению свободного массивного векторного поля (отметим, что $B_i \to 0$ при $r \to \infty$). Найти явный вид $A(r)$ вне скалярного кора, т. е. при $r \gg 1/m_H$ (но не обязательно $r \gg 1/m_V$). Найти массу солитона с логарифмической точностью по $m_H/m_V$, т. е. убедиться, что $M_{\mathrm{sol}} = C(m_V, e)(\ln \frac{m_H}{m_V} + O(1))$ и вычислить коэффициент $C$ перед логарифмом.

2. Изучить зависимость массы вихря от числа намоток $E(n)$ в случаях $e^2/\lambda \gg 1$ и $e^2/\lambda \ll 1$.