Электродинамика со скалярным полем:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + D_\mu \phi^* D_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi.$$

Взаимодействие (нелинейность) содержится в членах с ковариантными производными:

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\, \phi, \qquad D_\mu \phi^* = (\partial_\mu + ieA_\mu)\, \phi^*.$$

Ковариантные производные преобразуются при калибровочных преобразованиях так же, как поля, на которые они действуют:

$$\phi \to \mathrm{e}^{i\alpha} \phi; \qquad D_\mu \phi \to \mathrm{e}^{i\alpha} D_\mu \phi;$$

$$\phi^* \to \mathrm{e}^{-i\alpha} \phi^*; \qquad D_\mu \phi^* \to \mathrm{e}^{-i\alpha} D_\mu \phi^*;$$

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha.$$

Теперь α зависит от координат, $\alpha = \alpha(x)$. Уравнения движения:

$$D_\mu D_\mu \phi + m^2 \phi = 0;$$

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = eJ_\nu,$$

где ток

$$J_\mu\left(\phi, \phi^*, A_\mu\right) = -i\left(\phi^* D_\mu \phi - \phi D_\mu \phi^*\right), \tag{1}$$

сохраняется на уравнениях движения, $\partial_\mu J_\mu = 0$.

Абелева модель Хиггса.

Рассмотрим теорию абелева калибровочного поля, взаимодействующего с комплексным скалярным полем с потенциалом “мексиканская шляпа”:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + D_\mu \phi^* D_\mu \phi + \mu^2 \phi^* \phi - \lambda \left(\phi^* \phi\right)^2 - c. \tag{2}$$

Энергия:

$$E = \int d^3x \, \left(|D_0 \phi|^2 + |D_i \phi|^2 - \mu^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4 + c\right).$$

Множество вакуумов параметризуется функцией $\alpha(x)$ – вакуумы получаются один из другого калибровочными преобразованиями,

$$A_\mu^{(v)} = \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x), \qquad \phi^{(v)} = \mathrm{e}^{i\alpha(x)} \frac{\phi_0}{\sqrt{2}}, \qquad \phi_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}.$$

После диагонализации квадратичного лагранжиана остается массивное векторное поле с массой $m_V = e\phi_0$ и массивное скалярное поле с массой $m_s = \sqrt{2}\mu$. Поле, которое в модели без калибровочной симметрии было безмассовым голдстоуновским бозоном, теперь не входит в лагранжиан; соответствующая степень свободы “съелась” векторным полем, ставшим массивным. *Инвариантность относительно калибровочных преобразований не нарушилась.* (Механизм Хиггса).

Литература:

Рубаков, ч.1, §2.7, 6.1.
Шварц, §I.5.

Задачи.

1. Вывести выражение для тока (1) при помощи теоремы Нетер.
2. В абелевой модели Хиггса найти полный лагранжиан в терминах полей A_μ, $\chi = \mathrm{Re}\phi$, $\theta = \mathrm{Im}\phi$. Найти замену переменных, сводящую этот лагранжиан к лагранжиану взаимодействующих массивных векторного и скалярного полей. Найти законы преобразования этих полей относительно "больших" (не инфинитезимальных) калибровочных преобразований.