

CFT-1 (весна 2014)

Формулы, $D \neq 2$

1. Соглашения:

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$$

$$t = -ix^D$$

2. Пример $D = 2$:

$$S = -\frac{1}{2} \int d^2x (\partial_\mu X)^2$$

$$u = x^1 - x^0, v = x^1 + x^0$$

Симметрия: $u \rightarrow u'(u), v \rightarrow v'(v)$

3. Преобразования:

$$x \rightarrow x' = x - \xi$$

$$\delta T \equiv T'(x) - T(x) = \mathcal{L}_\xi T$$

$$\mathcal{L}_\xi T_\nu^\mu \equiv \xi^\lambda \partial_\lambda T_\nu^\mu - T_\nu^\lambda \partial_\lambda \xi^\mu + T_\lambda^\mu \partial_\nu \xi^\lambda$$

4. Конформные преобразования:

$$g'_{\mu\nu} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu}$$

$$\Omega = 1 + \omega \Rightarrow \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu} = 2\omega \eta_{\mu\nu}$$

5. Конформные преобразования, $D \neq 2$:

$$\xi_\mu = a_\mu + \lambda x_\mu + m_{\mu\nu} x^\nu + (2x_\mu(bx) - b_\mu x^2)$$

$$m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu}$$

Большие преобразования:

- (a) Трансляции: $x^{\mu'} = x^\mu + A^\mu$
 (b) Дилатации: $x^{\mu'} = \Lambda x^\mu$
 (c) Повороты: $x^{\mu'} = M_\nu^\mu x^\nu$
 (d) Специальные конформные (SCT)

6. Алгебра Пуанкаре:

$$P_\mu = -i\partial_\mu$$

$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

$$[P_\mu, L_{\nu\lambda}] = i(\eta_{\mu\nu} P_\lambda - \eta_{\mu\lambda} P_\nu)$$

$$[L_{\mu\nu}, L_{\lambda\rho}] = i(\eta_{\mu\rho} L_{\nu\lambda} + \eta_{\nu\lambda} L_{\mu\rho}) - (\mu \leftrightarrow \nu)$$

7. Конформная алгебра, $D \neq 2$:

$$D = -ix^\mu \partial_\mu$$

$$K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu)$$

$$[D, P_\mu] = iP_\mu$$

$$[D, K_\mu] = -iK_\mu$$

$$[K_\mu, P_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu} D - L_{\mu\nu})$$

$$[K_\mu, L_{\lambda\rho}] = i(\eta_{\mu\lambda} K_\rho - \eta_{\mu\rho} K_\lambda)$$

$$[K_\mu, K_\nu] = 0$$

8. Представления, $D \neq 2$:

$$L_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$$

$$D = \tilde{\Delta} - ix^\mu \partial_\mu$$

$$K^\mu = \kappa_\mu + 2x_\mu \tilde{\Delta} - 2x^\nu S_{\mu\nu} - i(2x_\mu(x\partial) - x^2 \partial_\mu)$$

Неприводимое: $\tilde{\Delta} = i\Delta, \kappa_\mu = 0$.

9. Токи: $\pi^\mu = \partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\mu \varphi)$

$$J_\xi^\mu = \pi^\mu \delta_\xi \varphi - \xi^\mu \mathcal{L}$$

$$\theta_\nu^\mu = \pi^\mu \partial_\nu \varphi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}$$

$$\theta_\nu^\mu = T_\nu^\mu + \partial_\rho Y^{\rho\mu}_\nu$$

$$Y^{\rho\mu}_\alpha = -\frac{i}{2} [\pi^\rho S^\rho_\alpha \varphi - \pi^\mu S^\rho_\alpha \varphi - \pi_\alpha S^{\rho\mu} \varphi]$$

$$J_D^\mu = T_\nu^\mu x^\nu + V^\mu, \text{ где } V^\mu = \Delta \pi^\mu \varphi - Y^{\lambda\mu}_\lambda$$

$$J^\mu_\alpha = (2x_\alpha x^\lambda - x^2 \delta_\alpha^\lambda) T_\lambda^\mu + 2x_\alpha V^\mu$$

$$\partial_\mu J_D^\mu = 0 \Rightarrow \partial_\mu J^\mu_\alpha = 2V_\alpha.$$

10. Уравнения движения:

$$\langle \delta S / \delta \Phi(x) \cdot \Phi(y) \rangle = \delta(x - y)$$

11. Корреляторы: $r_{ij} = |x_i - x_j|$

$$\langle \Phi_1(x'_1) \dots \Phi_n(x'_n) \rangle = \prod_i \left| \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} \right|^{-\Delta_i/D} \times \langle \Phi_1(x_1) \dots \Phi_n(x_n) \rangle$$

$$\langle \Phi_1 \Phi_2 \rangle = \frac{C_{12} \delta_{\Delta_1 \Delta_2}}{r_{12}^{2\Delta_1}}$$

$$\langle \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \rangle = \frac{C_{123}}{r_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} r_{13}^{\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2} r_{23}^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1}}$$

Ангармонические частные:

$$\eta = \frac{r_{12} r_{34}}{r_{13} r_{24}}, \quad \eta' = \frac{r_{12} r_{34}}{r_{23} r_{14}}$$

12. Тожества Уорда: $X = \Phi_1(x_1) \dots \Phi_n(x_n)$

$$\int d^D x \omega_a(x) \partial_\mu \langle J_a^\mu(x) X \rangle = \langle \delta X \rangle$$

$$\partial_\mu \langle T_\nu^\mu(x) X \rangle = -\sum_i \delta(x - x_i) \frac{\partial}{\partial x_i^\nu} \langle X \rangle$$

$$\langle T_\mu^\mu(x) X \rangle = -\sum_i \delta(x - x_i) \Delta_i \langle X \rangle$$

Задачи

1. Найти большие специальные конформные преобразования (п. 5d), и соответствующие им конформные факторы Ω^2 .
2. Вывести коммутационные соотношения 7.
3. Показать, что конформная алгебра 6, 7 изоморфна $so(D + 1, 1)$ и $so(D, 2)$ для пространств Евклида и Минковского, соответственно.
4. Доказать, что вариация любого общековариантного действия при координатных преобразованиях равна

$$\delta_\xi S = \int d^D x \left(\frac{\delta S}{\delta \varphi} \delta \varphi - T^{\mu\nu} D_\mu \xi_\nu \sqrt{-g} \right) \equiv 0, \quad (1)$$

где $T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \cdot \delta S / \delta g^{\mu\nu}$ — гравитационный тензор энергии–импульса. Используя уравнение (1), показать, что конформные токи можно записать в виде $J_\xi^\mu = T_\nu^\mu \xi^\nu$.

5. Вывести формулу 8 для K^μ .
6. Проверить, что преобразование

$$\Phi'(x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\Delta/D} \Phi(x) \quad (2)$$

есть “большое” конформное преобразование поля с $S_{\mu\nu} = 0$.

7. Показать, что тензор T_ν^μ в п. 9 симметричен на уравнениях движения. *Указание.* Вывести сохраняющийся ток $M_{\mu\nu\lambda}$, соответствующий моменту.
8. Вывести конформный ток J^μ_α в п. 9.
9. Пусть дилатонный ток сохраняется, а $V_\mu = \partial_\alpha L^\alpha_\mu$. Показать, что улучшенный тензор энергии–импульса

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{D-2} (\partial_\mu \partial^\alpha L_{(\alpha\nu)} + \partial_\nu \partial^\alpha L_{(\alpha\mu)} - \partial^2 L_{(\mu\nu)} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta L_{\alpha\beta}) \\ - \frac{1}{(D-2)(D-1)} (\eta_{\mu\nu} \partial^2 L^\alpha_\alpha - \partial_\mu \partial_\nu L^\alpha_\alpha) \end{aligned}$$

сохраняется является бесследовым. Здесь $L_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(L_{\mu\nu} + L_{\nu\mu})$.

10. Показать, что классическое безмассовое скалярное поле конформно–инвариантно в любой размерности $D \geq 3$. Найти улучшенный тензор энергии–импульса. Какой потенциал можно добавить?
11. Показать, что η и η' инвариантны относительно конформных преобразований.
12. Показать, что трехточечная функция п. 11 преобразуется по правильному закону.

Список литературы

- [1] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, “Conformal field theory,” Springer, 1997.