Классические неоднородные решения.

Изучим статические, но неоднородные классические решения. Рассмотрим теорию действительного скалярного поля в теории с одним пространственным измерением.

$$S = \int \mathrm{d}^2x(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2). \tag{1}$$

Мы уже изучали нарушение дискретной внутренней симметрии в этой теории. Помимо однородных решений $\phi = \pm v$, в теории есть неоднородные решения

$$\phi_k(x) = v\,\mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}v(x - x_0)\right). \tag{2}$$

Условие применимости классического приближения записывается в виде $v \gg 1$ (пространство-время двумерно). Можно показать, что малые возмущения над этим решением не приводят к неустойчивостям.

Литература:

В.А. Рубаков, Классические калибровочные поля, ч.1 (бозонные теории);
Р. Раджараман, Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля.

Задачи.

1. Рассмотрим решение, полученное из (2) при помощи преобразования Лоренца:
$$\phi_k(x) = v\,\mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}v\frac{(x - x_0) - Vt}{1 - V^2}\right),$$
где V– параметр. Вычислить классическую энергию и классический импульс движущегося кинка. Показать, что выполняются релятивистские соотношения между энергией, импульсом, скоростью и массой.

2. Найти спектр малых возмущений над кинком и явный вид локализованных мод.

3. Рассмотрим модель комплексного скалярного поля с лагранжианом
$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial_\mu\phi + \mu^2\phi^*\phi - \frac{\lambda}{2}\left(\phi^*\phi\right)^2.$$
   (a) Показать, что кинк $\phi = \phi^* = \phi_k(x)$ – решение классических уравнений поля с конечной энергией.
   (b) Изучить его устойчивость.
   (c) Описать возможные граничные условия и топологические сектора в этой модели.

4. *Sin-Гордон, преобразование Бэклунда и бризеры.* Рассмотрим модель действительного скалярного поля в (1+1) измерениях с лагранжианом
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi + m^2v^2[\cos(\varphi/v) - 1]\,. \tag{3}$$
   (a) Найти множество вакуумов в этой модели.

(b) Найти солитон, аналогичный кинку, который интерполирует между соседними вакуумами.

(c) Введем переменные $\phi = \varphi/v$, $\xi = mx$, $\tau = mt$, а также переменные

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}(\xi + \tau) \\
V &= \frac{1}{2}(\xi - \tau) \,.
\end{aligned}
$$

Пусть ϕ_0 — некоторое решение классических уравнений поля (зависящее, вообще говоря, от ξ и τ). Рассмотрим систему уравнений первого порядка относительно ϕ (уравнения преобразования Бэклунда)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial U}(\phi - \phi_0) &= \alpha \sin\left[\frac{1}{2}(\phi + \phi_0)\right] \\
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial V}(\phi + \phi_0) &= \frac{1}{\alpha} \sin\left[\frac{1}{2}(\phi - \phi_0)\right] \,.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

i. Показать, что решение ϕ этой системы удовлетворяет и уравнению sin-Гордона, т. е. уравнению поля, получаемому из лагранжиана (3). Это решение уравнений поля ϕ (которое, разумеется, зависит от выбора исходного решения ϕ_0) называют преобразованием Бэклунда решения ϕ_0.

ii. Решая систему (4) для $\phi_0 = 0$, показать, что преобразованием Бэклунда классического вакуума ($\phi_0 = 0$) является найденный в п.1 этой задачи sin-Гордоновский солитон (вообще говоря, движущийся).

iii. Решая систему (4) для $\phi_0 = \phi_{\rm sol}(x)$ и $\alpha = 1$ (здесь $\phi_{\rm sol}(x)$ — статический, т. е. неподвижный, солитон, найденный в п.1 этой задачи), найти зависящее от времени решение уравнений sin-Гордона (бризер). Проверить явной подстановкой в уравнение sin-Гордона, что это действительно решение.

(d) Найти, какие бывают топологические заряды всех возможных конфигураций в системе sin-Гордон, как они связаны с отображением бесконечности в множество классических вакуумов. Привести примеры конфигураций со всеми возможными топологическими зарядами. В каком топологическом секторе находится бризер?