Спонтанное нарушение симметрии.

Рассмотрим лагранжиан действительного скалярного поля ϕ с дискретной Z_2-симметрией $\phi \to -\phi$:

$$S = \int \mathrm{d}^4x(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4). \tag{1}$$

Знак коэффициента m^2 больше не определяется функционалом энергии

$$E = \int \mathrm{d}^3x(\frac{1}{2}\partial_0\phi\partial_0\phi + \frac{1}{2}\partial_i\phi\partial_i\phi + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4). \tag{2}$$

Будем искать основное состояние — решение уравнений движения, минимизирующее (2). В случае $m^2 = -\mu^2 < 0$ для однородных и не зависящих от времени конфигурацийполучим три решения:

$$\phi = 0, \qquad \phi = \pm\phi_0 = \pm\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}.$$

Малые возмущения над решением с $\phi = 0$ экспоненциально растут, что соответсвует неустойчивости самой конфигурации. Вакуум с $\phi = \phi_0$ не инвариантен относительно дискретной симметрии, т.е. Z_2 спонтанно нарушена (термином спонтанно подчеркивают, что сам лагранжиан (1) инвариантен относительно преобразований симметрии). Малые возмущения над вакуумами $\pm\phi_0$ имеют ненулевые массы.

В случае непрерывной глобальной симметрии спонтанно нарушенной симметрии отвечает безмассовое возмущение. Рассмотрим лагранжиан комплексного скалярного поля

$$S = \int \mathrm{d}^4x(\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2). \tag{3}$$

Он инвариантен относительно глобальных $U(1)$-преобразований $\phi \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\phi$. В случае $m^2 = -\mu^2 < 0$ имеется непрерывное семейство вакуумов

$$\phi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\frac{\mu}{\sqrt{2\lambda}}. \tag{4}$$

Выбор какого-то конкретного значения спонтанно нарушает симметрию. В спектре малых возмущений появляется безмассовое поле. Этот пример иллюстрирует более общее утверждение о соответствии числа безмассовых возмущений числу спонтанно нарушенных генераторов непрерывных преобразований симметрии.

Литература:

В.А. Рубаков, Классические калибровочные поля, ч.1 (бозонные теории).

Задачи.

1. Давайте проварьируем энергию (2) по полю ϕ в общем случае (учитывая зависимость поля от координат $\phi(x)$). Получатся ли в результате этой процедуры уравнения движения? Объяснить результат.

2. Эквивалентны ли лагранжианы для малых возмущений над различными вакуумами $\pm\phi_0$ в теории (1) при $m^2 < 0$?

3. Найти полный лагранжиан для малых отклонений над (4) в теории (3) при $\alpha = 0$. Чем он отличается от лагранжиана общего вида (степени не выше четырех) для двух полей?

4. Эквивалентны ли лагранжианы для малых возмущений над (4), если сравнивать теории над вакуумами с различными значениями α?

5. Введем поля $\rho(x), \beta(x)$ при помощи соотношения $\phi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\rho$. Когда такая параметризация возможноа? Изучить явление спонтанного нарушения симетрии в теории (3) в терминах этих полей. Как при такой параметризации получается безмассовое возбуждение над вакуумом (4) при $\alpha = 0$?