Обозначения.

Пространственные индексы: $i,\ j, \dots = 1, 2, 3.$, 3-вектор $\vec{x} \to (x^1, x^2, x^3)$.

Пространственно-временные индексы: $\mu,\ \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$, $x \to (t, \vec{x})$.

Метрика Минковского: $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$.

По повторяющимся индексам производится суммирование (если нет дополнительных оговорок).

Пример: лоренцев скаляр, составленный из двух 4-векторов $p^\mu \to (p^0, \vec{p})$, $x^\mu \to (x^0, \vec{x})$:

$$\eta_{\mu\nu} p^\mu x^\nu \equiv p_\nu x^\nu = p^0 x^0 - p^1 x^1 - p^2 x^2 - p^3 x^3.$$

Для сокращенной записи формул удобно ввести символ $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

Система единиц: $\hbar = c = 1$.

Размерность $[c] = \dfrac{L}{T}$, $[\hbar] = M\dfrac{L^2}{T}$, поэтому $[L] = [T] = [M^{-1}] = [E^{-1}]$ (L – длина, T – время, E – энергия, M – масса, $\hbar$ – постоянная Планка, c – скорость света).

Лагранжианы свободных полей.

Пусть $\phi(x)$-действительное поле, скаляр по группе Лоренца. Для свободного поля действие

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2\right) \tag{1}$$

приводит к уравнению Клейна-Гордона.

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi = 0.$$

Пусть $B_\mu(x)$-действительное поле, вектор по группе Лоренца. Полезно изучить свободную теорию с действием

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left(-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \frac{M^2}{2}B_\mu B^\mu\right), \tag{2}$$

где $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$.

Литература:

В.А. Рубаков, Классические калибровочные поля, ч.1 (бозонные теории).

Дополнительная литература:

К.В. Степаньянц, Классическая теория поля;

E.J. Weinberg, Classical Solutions in Quantum Field Theory.

К последующим главам будут добавлены ссылки на обзоры и оригинальные статьи.

Задачи.

1. Показать, что наиболее общий лагранжиан, удовлетворяющий требованиям лоренц-инвариантности, локальности и линейности уравнений поля для скалярного поля ϕ,

$$\mathcal{L} = a(\partial_\mu \phi)^2 + b\partial_\mu^2 \phi + c\phi\partial_\mu^2 \phi + \frac{m^2}{2}\phi^2 + d \cdot \phi,$$

   эквивалентен (1) при $m \neq 0$. Найти размерность констант a, b, c, d, m.

2. Проверить явным вычислением, что энергия, полученная из лагранжиана действительного скалярного поля, сохраняется ($\frac{dE}{dt} = 0$), если поле ϕ достаточно быстро убывает на пространственной бесконечности и удовлетворяет уравнениям поля.

3. Получить уравнения движения для теории с векторным полем (2). Давайте изменим знак перед M^2 на противоположный. Появятся ли при этом экспоненциально растущие со временем решения?

4. Найти (нетеровский) тензор энергии-импульса для векторного поля в теории (2) и построить по нему выражение для сохраняющейся энергии. Положительна ли она при нашем выборе знака перед M^2 в (2)?