

Условия сдачи экзамена по курсу “Классические калибровочные поля”
(весна 2013)

1. Оценка за экзамен выставляется по результатам устной сдачи решенных дома задач из приведенного ниже списка. Сдавать задачи можно на двух коллоквиумах (ориентировочно, в марте и в мае), после дня второго коллоквиума и до дня официального экзамена (июнь) включительно.
2. Для получения положительной оценки необходимо сдать хотя бы 2 задачи – одну на первом коллоквиуме (из части I) и одну из части II. Эти задачи должны быть разными у всех сдающих.
3. За сданную задачу засчитывается балл, указанный после названия задачи. Для получения оценки “отлично” надо набрать в сумме не менее 18 баллов, для оценки “хорошо” – не менее 10 баллов. Баллы за задачу не делятся, то есть засчитываются только при сданном решении всех пунктов задачи.

Задачи к экзамену по курсу “Классические калибровочные поля”
(весна 2013)

(в скобках после названия задачи указано количество баллов)

Часть I. Задачи к коллоквиуму “Скалярные поля” (март 2013)

1. Ленты вокруг мексиканской шляпы (3).

Рассмотрим теорию двух действительных скалярных полей ϕ^a , $a = 1, 2$, в $(1+1)$ -мерном пространстве-времени. Лагранжиан выберем в виде (по повторяющемуся индексу a подразумевается суммирование)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial_\mu \phi^a - \frac{\lambda}{4} (\phi^a \phi^a - v^2)^2 - \varepsilon \phi^1.$$

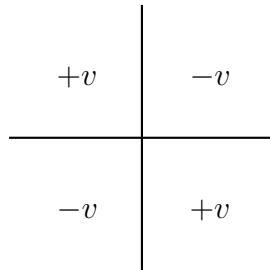
1. Найти размерности констант λ , v и ε .
2. Найти основное состояние и спектр малых возмущений около него при малых ε .
3. Показать, что при достаточно малых ε в модели имеется солитон — статический локальный минимум функционала энергии, являющийся решением уравнений поля и имеющий конечную энергию.
4. Показать, что этот солитон можно продеформировать в основное состояние так, что все промежуточные полевые конфигурации будут иметь конечную энергию. Таким образом, солитон не имеет топологической природы.
5. Оценить высоту энергетического барьера между солитоном и основным состоянием при малых ε .

2. Пересечение доменных стенок (4).

Рассмотрим модель одного действительного скалярного поля с потенциалом

$$V = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2.$$

В (1+1)-мерном пространстве-времени в этой модели существует топологический солитон — кинк — устойчивое решение уравнений поля, зависящее только от x_1 . В (2+1)-мерном пространстве-времени в той же модели существуют доменные стенки — решения с бесконечной энергией, имеющие профиль кинка вдоль оси x_1 и не зависящие от x_0, x_2 . Стенка разделяет области (домены), в которых поле принимает различные вакуумные значения $\phi = \pm v$. Предположим, что создана конфигурация, отвечающая двум пересекающимся доменным стенкам, так что имеются четыре домена (см. рис.). Устойчиво ли такое пересечение?



3. Локализация частиц в модели Sin-Gordon (4).

Рассмотрим модель действительного скалярного поля ϕ с потенциалом Sin-Gordon (см. задачу 18 для семинаров), но в (4+1)-мерном пространстве-времени. Теория допускает статические решения в виде доменных стенок, имеющих профиль солитона: $\phi(x) = \phi_s(x_4)$, не зависящие от x_0, x_1, x_2, x_3 .

1. Рассмотреть малые возмущения $\chi(x)$ около стенки, представив $\phi(x) = \phi_s(x_4) + \chi(x)$. Выписать линеаризованное уравнение для $\chi(x)$ и показать, что имеются, в частности, решения двух типов: (а) безмассовые скалярные возбуждения, локализованные на доменной стенке, т.е. распространяющиеся в 3-мерном пространстве (x_1, x_2, x_3) ; соответствующие решения экспоненциально убывают с ростом x_4 , т.е. при удалении от стенки; (б) массивные возбуждения, распространяющиеся во всем 4-мерном пространстве.
2. Представим себе, что и вправду наше 3-мерное пространство на самом деле — доменная стенка в (4+1)-мерии, а наши элементарные частицы соответствуют (практически) безмассовым локализованным возбуждениям, описанным в пункте 1. Если частица получает энергию, превосходящую массу низшего нелокализованного возбуждения, то она может перейти в нелокализованное состояние, т.е. “уйти” в дополнительные измерения и пропасть для (3+1)-мерного наблюдателя. Учитывая, что на современных ускорителях, т.е. до энергий порядка ТэВ, такие события не наблюдались, получить экспериментальные ограничения на параметры лагранжиана.

3. Теория допускает решения в виде стенок с профилем бризера: $\phi(x) = \phi_b(x_0, x_4)$, не зависящие от x_1, x_2, x_3 . Исследовать вопрос о локализации частиц на таких стенках.

4. Солитоны в модели нескольких полей (6).

Рассмотрим теорию N действительных скалярных полей ϕ_a , $a = 1, \dots, N$, в $(1+1)$ -мерном пространстве–времени. Пусть потенциал имеет вид

$$V = \frac{1}{2} \sum_a \left(\frac{\partial U}{\partial \phi_a} \right)^2,$$

где $U(\phi_1, \dots, \phi_N)$ – функционал полей ϕ_a , называемый суперпотенциалом.

1. Показать, что экстремумы суперпотенциала соответствуют минимумам потенциала.
2. Пусть суперпотенциал выбран так, что имеется дискретное множество вырожденных вакуумов $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \dots$. Тогда могут существовать статические топологические солитоны, интерполирующие между различными вакуумами (аналоги кинка). Используя вспомогательное неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \sum_i \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial \phi_i} \right)^2 \geq 0,$$

показать, что энергия $E_{\alpha\beta}$ солитона, интерполирующего между вакуумами $\phi^{(\alpha)}$ и $\phi^{(\beta)}$, ограничена снизу, $E_{\alpha\beta} \geq \Sigma_{\alpha\beta} = |U[\phi^{(\alpha)}] - U[\phi^{(\beta)}]|$, и минимум энергии достигается на решениях уравнений первого порядка. Показать, используя гидродинамическую аналогию, что решения этих уравнений существуют. Показать, что эти решения удовлетворяют уравнениям поля, полученным из исходного лагранжиана, то есть в модели существуют стабильные статические солитоны с энергией $\Sigma_{\alpha\beta}$, интерполирующие между вакуумами $\phi^{(\alpha)}$ и $\phi^{(\beta)}$.

3. Пусть $N = 2$,

$$U = \frac{m^2}{\lambda} \phi_1^1 - \frac{\lambda}{3} \phi_1^3 - \alpha \phi_1 \phi_2^2.$$

Найти множество вакуумов в модели. Используя результаты пункта 2, показать, что имеется непрерывное семейство вырожденных по энергии солитонов, интерполирующих между вакуумами с наибольшей разницей $\Sigma_{\alpha\beta}$. Найти эти солитоны – явно при $\rho \equiv \lambda/\alpha = 1$ и $\rho = 4$, в квадратурах при остальных значениях ρ . Построить графики, изображающие различные солитоны из этого семейства при $\rho = 4$. Найти солитоны, интерполирующие между остальными вакуумами.

5. Поле со значением на сфере S^3 (6).

Рассмотрим модель четырех действительных скалярных полей ϕ^a в $(3+1)$ -мерном пространстве–времени, подчиняющихся условию $\phi^a(x)\phi^a(x) = 1$ (т.е. поле принимает значение на сфере S^3). Пусть

$$\mathcal{L}_0 = \frac{v^2}{2} \partial_\mu \phi^a \partial_\mu \phi^a,$$

где v – константа, $\mu = 0, 1, 2, 3$, $a = 1, 2, 3, 4$.

1. Найти размерность константы v .
2. Показать, что \mathcal{L}_0 инвариантен относительно движений сферы S^3 , на которой принимают значения поля ϕ^a .
3. Найти наиболее общий вид лагранжиана \mathcal{L}_1 , инвариантного относительно таких вращений и преобразований Лоренца и содержащего четыре производных по x_μ , но не более двух производных по времени.

Будем изучать теорию с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1.$$

4. Найти уравнения поля.
5. Найти функционал энергии. Найти, при каких условиях энергия ограничена снизу. Найти множество вакуумов. Выбрав один из них, найти спектр малых возмущений.
6. Рассмотреть статические конфигурации с конечной энергией. Показать, что они разбиваются на топологические сектора, характеризуемые целым топологическим числом n . Таким образом, в модели имеется возможность существования топологических солитонов.
7. Показать, что в теории с $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$ (то есть без \mathcal{L}_1) статические солитоны отсутствуют.
8. Найти подстановку, инвариантную относительно пространственных вращений, дополненных движениями сферы S^3 и позволяющую свести уравнения поля к одному обыкновенному дифференциальному уравнению на функцию $f(r)$, где $r = \sqrt{x_i x_i}$. Найти значения $f(0)$ и $f(\infty)$, при которых решения несингулярны, а статическая энергия конечна. Найти связь между $f(0)$, $f(\infty)$ и топологическим числом n .
9. Оценить массу и размер солитона. Найти для $n = 1$ решение и массу солитона численно, построить график решения.

6. Кинки с модифицированным кинетическим членом (6).

Рассмотрим теорию одного действительного скалярного поля в $(1+1)$ -мерном пространстве-времени с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\alpha}{4} (\partial_\mu \phi)^2 (\partial_\nu \phi)^2 \frac{\lambda}{4} \left(1 + \frac{3}{2} \alpha \lambda v^4 \right) (\phi^2 - v^2)^2, \quad \mu = 0, 1.$$

Показать, что в теории существуют решения типа кинка при любых α . Найти решение явно при $\alpha \rightarrow \infty$.

7. V-потенциал.

Рассмотрим теорию одного комплексного скалярного поля ϕ в $(d+1)$ -мерном пространстве-времени с лагранжианом

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - \lambda |\phi|^4, \tag{1}$$

где $\lambda > 0$.

1. Найти размерность параметра λ .
2. Найти глобальную симметрию и сохраняющийся заряд Q .
3. Описать множество вакуумов. Что можно сказать о малых возмущениях около вакуума в модели (1)? В модели (1) с добавленным массовым членом $m^2|\phi|^2$?
4. Показать, что в модели имеются солитонные решения с конечным зарядом Q и конечной энергией E , то есть Q -шары. Найти зависимость $E(Q)$ для таких решений, обсудить устойчивость.
5. Для $d = 1, 2, 3$ найти Q -шары в явном виде. Изучить поведение поля вдали от центра Q -шара.

Часть II. Задачи к коллоквиуму “Туннелирование. Абелевы калибровочные теории”
(май 2013)

8. Сфалерон в абелевой модели Хиггса (3).

Найти сфалерон в абелевой модели Хиггса в $(1+1)$ -мерном пространстве-времени.

9. Абелева модель Хиггса и сверхпроводимость (3).

Рассмотрим абелеву модель Хиггса, в которой A_μ – обычное электромагнитное поле, а скалярное поле ϕ соответствует конденсату куперовских пар электронов; знак перед $m^2|\phi|^2$ в лагранжиане зависит от внешних условий.

1. Записать уравнения движения в терминах \mathbf{E} и \mathbf{B} , определить ток и электрическое сопротивление. Показать, что в вакууме $\phi = v$ имеет место эффект Мейсснера для магнитного поля и равенство нулю электрического сопротивления.
2. При изменении параметров системы, когда становится $m^2 < 0$, в ней образуются вихри Абрикосова, внутри которых $\phi \approx 0$, а снаружи $\phi \approx v$. Пусть λ – константа самодействия скалярного поля (зависящая от свойств материала), а e – калибровочная константа (электрический заряд). Почему в сверхпроводнике II рода ($\lambda \gg e^2$) образуется решетка из большого числа N вихрей с топологическим числом 1 каждый, а в сверхпроводнике I рода ($\lambda \ll e^2$) образуется один большой вихрь с топологическим числом N , то есть в большом объеме внутри вихря эффективно восстанавливается обычная фаза $\phi = 0$?

10. Глобальные вихри (4).

Рассмотрим теорию одного комплексного скалярного поля в $(2+1)$ -мерном пространстве-времени:

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - \frac{\lambda}{2} (|\phi|^2 - v^2)^2.$$

1. Показать, что в теории имеются топологические дефекты — классические статические решения с нетривиальной асимптотикой.
2. Показать, что энергия такого дефекта – глобального вихря – бесконечна и расходится логарифмически с увеличением расстояния от центра вихря.

3. Рассмотреть систему из глобальных вихря и антивихря, расположенных на большом расстоянии R друг от друга. Найти поле вдали от центров вихря и антивихря и энергию их взаимодействия.

11. Липатон (4).

Рассмотрим модель одного скалярного поля в $(3 + 1)$ -мерном пространстве-времени с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + \frac{\lambda}{4} \varphi^4,$$

где $\lambda > 0$. Скалярный потенциал $V(\varphi) = -\frac{\lambda}{4} \varphi^4$ не ограничен снизу, поэтому основное состояние в модели отсутствует. Грубо говоря, основное состояние соответствует полю $\varphi = \infty$. Тем не менее, можно задать следующие вопросы:

1. Является ли состояние $\varphi = 0$ устойчивым относительно малых возмущений с конечной энергией?
2. Если да, найти в явном виде евклидов пузырь, соответствующий распаду состояния $\varphi = 0$ туннельным образом. Считая, что $\lambda \ll 1$, найти квазиклассическую экспоненту для вероятности распада.

12. Космические струны со сверхпроводимостью (5).

Рассмотрим абелеву модель Хиггса в $(3+1)$ -мерном пространстве-времени:

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B_{\mu\nu} + |D_\mu \phi|^2 - \frac{\lambda}{2} (|\phi|^2 - v^2)^2,$$

где $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$, $D_\mu \phi = (\partial_\mu - ieB_\mu)\phi$. Пусть имеется бесконечно длинная “космическая струна” – не зависящее от координаты x_3 статическое решение в виде вихря Абрикосова–Нильсена–Олесена в плоскости (x_1, x_2) . Рассмотрим теорию скалярного поля χ , взаимодействующего с полем ϕ и с электромагнитным полем A_μ :

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + |D_\mu \chi|^2 - \frac{\kappa}{2} (|\chi|^2 - \mu^2)^2 - h|\phi|^2|\chi|^2,$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $D_\mu \chi = (\partial_\mu - iqA_\mu)\chi$, $h > 0$.

1. Рассмотрим систему с лагранжианом $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$. Показать, что при некоторых значениях параметров потенциала $(\lambda, \kappa, h, v, \mu)$ решение с наименьшей энергией соответствует ненулевому полю χ , локализованному по координатам (x_1, x_2) в сердцевине струны.
2. Поле χ несет электрический заряд, поэтому при включении внешнего электрического поля \mathbf{E} , направленного вдоль струны, по струне потечет электрический ток, то есть будет отлична от нуля компонента J_3 вектора плотности тока

$$J_\mu = i(\chi^* D_\mu \chi - \chi D_\mu \chi^*).$$

Показать, что при постоянном \mathbf{E} ток растет линейно со временем, то есть струна представляет собой сверхпроводящую проволоку.

3. Показать, что имеется критическое значение J^c тока через струну, выше которого сверхпроводимость нарушается. Оценить J^c (в системе единиц $\hbar = c = 1$ и в амперах на m^2), если m_χ и q – масса и заряд электрона.

13. Фотон–парафотонные осцилляции (6).

Рассмотрим четырехмерную теорию двух абелевых векторных полей A_μ и B_μ с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B_{\mu\nu} - \frac{\chi}{2}F_{\mu\nu}B_{\mu\nu} - m^2B_\mu^2,$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, а $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$. Рассмотрим эксперимент, состоящий из источника и приемника фотонов, разделенных расстоянием $2L$. Посередине между источником и приемником установлена тонкая светонепроницаемая стенка. Источник испускает в направлении на приемник j фотонов в секунду (пучок света не поляризован). Найти скорость регистрации j_1 фотонов приемником, если вся система помещена в светонепроницаемый ящик. Рассмотреть случаи: (а) в ящике вакуум; (б) в ящике жидкость с показателем преломления n ; (в) в ящике плазма с плотностью электронов n_e . Указание: в такой плазме функции отклика фотонов задаются соотношениями $\pi_\pm = \omega_p^2$, $\pi_L = \omega_p^2 - \mathbf{k}^2$, где плазменная частота $\omega_p = 4\pi\alpha n_e/m_e$, m_e – масса электрона, α – постоянная тонкой структуры. Параметр смешивания $\chi \ll 1$, частота излучаемых фотонов $\omega \gg m$. Поле B_μ с веществом не взаимодействует.

14. Вихрь на сфере (6).

Рассмотрим абелеву модель Хиггса в $(2+1)$ -мерном пространстве, в котором пространственные измерения представляют собой двумерную сферу радиуса R .

1. Введя на сфере координаты (θ, ψ) , $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$, записать в их терминах действие

$$S = \int dt d\theta d\psi \sin \theta \mathcal{L}.$$

2. Изучить топологические свойства классических статических решений с конечной энергией.
3. Показать, что имеется устойчивый солитон, в котором (если он расположен в точке $\theta = 0$) скалярное поле имеет вид

$$\phi(\theta, \psi) = f(\theta)e^{i\psi}.$$

Найти подстановку для калибровочного поля, изучить поведение скалярного и калибровочного полей при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Оценить массу и размер солитона.

15. Рассеяние в поле вихря (8).

Рассмотрим вихрь – статический солитон в абелевой модели Хиггса в $(2+1)$ -мерном пространстве-времени. Обозначим конфигурацию вихря $A_\mu^c(\mathbf{x})$, $\varphi^c(\mathbf{x})$. Добавим в модель еще одно комплексное скалярное поле ξ с зарядом q и лагранжианом

$$\mathcal{L}_\xi = (D_\mu \xi)^*(D_\mu \xi) - m_\xi^2 \xi^* \xi,$$

где

$$D_\mu \xi = \partial_\mu \xi - ieq A_\mu \xi.$$

Будем считать поля A_μ^c , φ^c внешними.

1. Записать уравнение для поля ξ во внешнем поле вихря. Найти разложение его решений по собственным функциям энергии E и углового момента $L = -i\frac{\partial}{\partial\theta}$, где θ — полярный угол на плоскости (x^1, x^2) . Найти соответствующие радиальные уравнения и их решения вдали от центра вихря при низких энергиях $E \ll m_V, m_H, m_\xi$.
2. В унитарной калибровке, где $\varphi^c(\mathbf{x})$ действительное, поле $\xi(\mathbf{x}, t)$ вдали от вихря можно интерпретировать (по крайней мере при низких энергиях) как волновую функцию частицы. Найти сечение рассеяния этой частицы на вихре на фиксированный угол θ при низких энергиях и при произвольных q .

16. E-шары (8).

Рассмотрим в $(3+1)$ измерениях теорию комплексного скалярного поля ϕ с потенциалом $V(\phi)$, допускающим существование Q -шаров:

$$V(\phi) \rightarrow M^4 \quad \text{при } |\phi| \rightarrow \infty,$$

$$V(\phi) \sim m^2|\phi|^2 \quad \text{при } |\phi| \rightarrow 0.$$

Пусть поле ϕ взаимодействует с абелевым калибровочным полем (электромагнитным), заряд поля e . Изучить вопрос о существовании Q -шаров в такой теории. Описать соответствующие решения. При каких зарядах они устойчивы?