Изученные ранее классические решения.

Решения свободных уравнений поля (линейных или линеаризованных)	плоские волны	интерпретируются в квантовой теории как элементарные частицы, закон дисперсии $\leftrightarrow$ масса
Решения полных (нелинейных) уравнений поля	солитоны — топологические (кинк) и нетопологические (Q-шары)	интерпретируются как квазиклассические ("большие") частицы
Решения вспомогательных уравнений (уравнений поля, аналитически продолженных в евклидово время)	отскоковые решения	никак не интерпретируются, но позволяют найти вероятности туннельных процессов и состояние, в которое с наибольшей вероятностью происходит туннелирование, в главном квазиклассическом приближении

Электродинамика со скалярным полем:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + D_\mu \phi^* D_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi.$$

Взаимодействие (нелинейность) содержится в членах с ковариантными производными:

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu - ieA_\mu\right) \phi, \qquad D_\mu \phi^* = \left(\partial_\mu + ieA_\mu\right) \phi^*.$$

Ковариантные производные преобразуются при калибровочных преобразованиях так же, как поля, на которые они действуют:

$$\phi \to \mathrm{e}^{i\alpha} \phi; \qquad D_\mu \phi \to \mathrm{e}^{i\alpha} D_\mu \phi;$$

$$\phi^* \to \mathrm{e}^{-i\alpha} \phi^*; \qquad D_\mu \phi^* \to \mathrm{e}^{-i\alpha} D_\mu \phi^*.$$

Уравнения движения:

$$D_\mu D_\mu \phi + m^2 \phi = 0;$$

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = eJ_\nu,$$

где ток

$$J_\mu \left(\phi, \phi^*, A_\mu\right) = -i \left(\phi^* D_\mu \phi - \phi D_\mu \phi^*\right),$$

сохраняется на уравнениях движения, $\partial_\mu J_\mu = 0$.

Абелева модель Хиггса.

Рассмотрим теорию абелева калибровочного поля, взаимодействующего с комплексным скалярным полем с потенциалом "мексиканская шляпа":

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + D_\mu \phi^* D_\mu \phi + \mu^2 \phi^* \phi - \lambda \left(\phi^* \phi\right)^2 - c. \tag{7}$$

Энергия:

$$E = \int d^3x \, \left(|D_0 \phi|^2 + |D_i \phi|^2 - \mu^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4 + c\right).$$

Множество вакуумов параметризуется функцией $\alpha(x)$ – вакуумы получаются один из другого калибровочными преобразованиями,

$$A_\mu^{(v)} = \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x), \qquad \phi^{(v)} = \mathrm{e}^{i\alpha(x)}\frac{\phi_0}{\sqrt{2}}, \qquad \phi_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}.$$

После диагонализации квадратичного лагранжиана остается массивное векторное поле с массой $m_V = e\phi_0$ и массивное скалярное поле с массой $m_s = \sqrt{2}\mu$. Поле, которое в модели без калибровочной симметрии было безмассовым голдстоуновским бозоном, теперь не входит в лагранжиан; соответствующая степень свободы "съелась" векторным полем, ставшим массивным. *Инвариантность относительно калибровочных преобразований не нарушилась.* (Механизм Хиггса).

Литература:

Рубаков, ч.1, §5.1, 5.2, 6.1.
Ченг, Ли, §5.3, 8.9.
Райдер, §8.1, 8.3, 8.4.
Шварц, §I.5.
Коулмен (в сб. "Квантовая теория калибровочных полей", с.23), §1, 2.1, 2.2, 2.4.

Теоремы об отсутствии солитонов.

Рассмотрим теорию нескольких скалярных полей ϕ^a в $(d{+}1)$-мерном пространстве–времени,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}F_{ab}(\phi)\partial_\mu\phi^a\partial_\mu\phi_b - V(\phi). \tag{8}$$

Если существует статическое решение с конечной энергией ϕ_k^a, то оно является экстремалью функционала энергии

$$E = \int d^dx\,\left[\frac{1}{2}F_{ab}(\phi)\partial_i\phi^a\partial_i\phi^b + V(\phi)\right]. \tag{9}$$

В частности, можно рассмотреть подкласс вариаций

$$\phi_\lambda(\mathbf{x}) = \phi_k(\lambda\mathbf{x}) \tag{10}$$

(исчезающая на бесконечности малая вариация поля ϕ при $\lambda \sim 1$ и достаточно гладких $\phi(\mathbf{x})$). Ограничение функционала (9) на эти вариации, функция $E(\lambda) = E[\phi_\lambda(\mathbf{x})]$, должна иметь экстремум при $\lambda = 1$. Если $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$, то

$$E(\lambda) = \lambda^{-d}\left(\lambda^2\Gamma + \Pi\right),$$

где

$$\Gamma = \int d^dy\,\frac{1}{2}F_{ab}(\phi)\partial_\mu\phi^a\partial_\mu\phi_b, \quad \Pi = \int d^dy\,V(\phi),$$

$\Gamma \geq 0$ и $\Pi \geq 0$ не зависят от λ. Условие $\left.\frac{dE}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} = 0$ приводит к $(2-d)\Gamma - d\cdot\Pi = 0$. Оно может быть выполнено для $d > 2$ только при $\Pi = \Gamma = 0$ (т.е. только на вакуумных конфигурациях), при $d = 2$ только при $\Pi = 0$, при $d = 1$ без ограничений.

При наличии калибровочных полей, чтобы говорить о статических решениях, нужно фиксировать калибровку. Зафиксируем $A_0 = 0$ и рассмотрим теорию со скалярными и калибровочными полями, например,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + |D_\mu\phi|^2 - V(\phi).$$

Вариации (10) дополним

$$A_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{x}) = \lambda A_\mu^{(k)}(\lambda\mathbf{x}),$$

условие стационарности приводит к

$$(4-d)G + (2-d)\Gamma - d\cdot\Pi = 0,$$

где

$$G = \int d^d y \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2\right), \quad \Gamma = \int d^d y\, |D_\mu \phi|^2.$$

Окончательно, в теориях с квадратичными по производным лагранжианами для статических солитонов:

$d > 4$: нет солитонов,
$d = 4$: солитоны могут быть только в чисто калибровочных теориях,
$d = 3$: солитоны могут быть в теориях со скалярными и калибровочными полями,
$d = 2$: солитоны могут быть в теориях со скалярными и калибровочными полями, в чисто скалярных теориях — только при $V(\phi) = 0$.
$d = 1$: солитоны могут быть в теориях со скалярными и калибровочными полями и в чисто скалярных теориях.

Литература:
Рубаков, ч.2, §7.2.
Раджараман, §3.2.

Вихрь.

Рассмотрим абелеву модель Хиггса (7) в (2+1)-мерном пространстве–времени. Потенциал можно записать как

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2}\left(|\phi|^2 - v^2\right)^2.$$

Интересуемся статическими солитонами в калибровке $A_0 = 0$. Конечность энергии означает, что $|\phi| \to v$ при $|\mathbf{x}| \to \infty$. Фаза может быть при этом различной; с точностью до несингулярных калибровочных преобразований возможные асимптотики суть $\phi \to v\mathrm{e}^{in\theta}$, где n – целое число, которое характеризует число наматываний при отображении множества пространственных бесконечностей (окружности бесконечного радиуса в пространстве координат) в множество вакуумов (окружность радиуса v в пространстве полей ϕ). В секторе с $n = 1$ будем искать решение, инвариантное относительно пространственных вращений, дополненных калибровочными преобразованиями. Наиболее общая такая подстановка, с точностью до добавления чистой калибровки:

$$\begin{aligned} \phi(r,\theta) &= v\mathrm{e}^{i\theta}F(r), \\ A_i(r,\theta) &= -\frac{1}{er}\epsilon_{ij}n_j A(r). \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь r и θ – полярные координаты на плоскости $\mathbf{x}$, n_j – единичный вектор, направленный в точку $\mathbf{x}$. Конечность энергии и гладкость при $r = 0$ приводят к граничным условиям:

$$\begin{aligned} &F(r) \to 1, \quad A(r) \to 1 \qquad r \to \infty, \\ &F(r) \to 0, \quad A(r) \to 0 \qquad r \to 0, \end{aligned} \tag{12}$$

а уравнения поля сводятся к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям на функции F и A:

$$-\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dA}{dr}\right) - 2e^2v^2\frac{F^2}{r}(1-A) = 0\ , \tag{13}$$

$$-\frac{d}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}\right) + \lambda v^2 rF(F^2-1) + \frac{F}{r}(1-A)^2 = 0\ . \tag{14}$$

Решение системы (13), (14), (12) — солитон в топологическом секторе $n = 1$ — вихрь.

Массу солитона можно оценить из размерных соображений. Введем новые переменные ($m_V = \sqrt{2}ev$ и $m_H = \sqrt{2\lambda}v$ – массы векторного и скалярного малых возбуждений около вакуума):

$$\mathbf{y} = m_V \mathbf{x}, \quad \phi(\mathbf{x}) = v\tilde{\phi}(\mathbf{y}), \quad A_i(\mathbf{x}) = \frac{m_V}{e}\tilde{A}_i(\mathbf{y}).$$

Тогда энергия

$$E = \frac{m_V^2}{e^2}\int d^2y \left(\frac{1}{4}\tilde{F}_{ij}^2 + \frac{1}{2}|\tilde{D}_i\tilde{\phi}|^2 + \frac{1}{8}\frac{m_H^2}{m_V^2}\left(|\tilde{\phi}|^2 - 1\right)^2\right).$$

Считая $m_V \sim m_H$, а все безразмерные поля порядка единицы, оцениваем $M_{\rm sol} \sim m_V^2/e^2 \sim v^2$, а характерный размер солитона $y \sim 1$, то есть $r_{\rm sol} \sim 1/m_V$.

Литература:

Рубаков, ч.2, §7.3.
Раджараман, §3.6.
Шварц, §2.3.
Райдер, §10.2.

Задачи.

31. В абелевой модели Хиггса найти полный лагранжиан в терминах полей A_μ, χ, θ. Найти замену переменных, сводящую этот лагранжиан к лагранжиану взаимодействующих массивных векторного и скалярного полей. Найти законы преобразования этих полей относительно “больших” (не инфинитезимальных) калибровочных преобразований.

32. Показать, что для статических полей уравнения поля, полученные из лагранжиана (8), являются одновременно условиями экстремальности функционала энергии (9).

33. Нами были рассмотрены следующие классические решения в чисто скалярных теориях: (а) Q-шары — солитоны в (3+1) измерениях, (б) евклидов пузырь (отскоковое решение) — решение в (4+0), то есть статическое решение в (4+1) измерениях. Как согласовать существование этих решений с теоремами об отсутствии солитонов?

34. Изучить вопрос о существовании решения уравнений (13), (14) с граничными условиями (12).

35. Найти это решение численно при $m_V = m_H = 1$.

36. Записать функционал энергии в абелевой модели Хиггса для сферически симметричных конфигураций полей (11) в виде однократного интеграла по r. Найти условия экстремальности этого функционала и показать, что они сводятся к уравнениям (13), (14).

37. Рассмотреть случай $m_H \gg m_v$. Показать, что область, где $|\varphi|$ существенно отличается от v, т. е. $(|\varphi| - v) \sim v$, имеет размер порядка $1/m_H$, а область, где $A(r)$ существенно отличается от единицы, имеет размер порядка $1/m_V$. Таким образом, солитон имеет маленький скалярный кор и относительно большой векторный кор. Найти асимптотику функции $A(r)$ вне векторного кора ($r \gg 1/m_V$). Показать, что вне скалярного кора ($r \gg 1/m_H$, но не обязательно $r \gg 1/m_V$) поле $B_i = (A_i + \frac{1}{er}\varepsilon_{ij}n_j)$ удовлетворяет уравнению свободного массивного векторного поля (отметим, что $B_i \to 0$ при $r \to \infty$). Найти явный вид $A(r)$ вне скалярного кора, т. е. при $r \gg 1/m_H$ (но не обязательно $r \gg 1/m_V$). Найти массу солитона с логарифмической точностью по m_H/m_V, т. е. убедиться, что $M_{\rm sol} = C(m_V, e)(\ln\frac{m_H}{m_V} + O(1))$ и вычислить коэффициент C перед логарифмом.