## Обозначения.

Пространственные индексы: $i,\ j,\ldots=1,2,3$.

Пространственно-временные индексы: $\mu,\ \nu,\ldots=0,1,2,3$.

Метрика Минковского: $g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)\,.$

Верхние и нижние индексы обычно не различаются. По повторяющимся индексам – суммирование: $k_\mu x_\mu\equiv k_0x_0-k_ix_i\equiv k_0x_0-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$.

$\partial_\mu\equiv\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$.

Система единиц: $\hbar=c=1$. Размерность $[c]=\dfrac{L}{T}$, $[\hbar]=M\dfrac{L^2}{T}$, поэтому $[L]=[T]=[M^{-1}]=[E^{-1}]$ ($L$ – длина, $T$ – время, $E$ – энергия, $M$ – масса, $\hbar$ – постоянная Планка, $c$ – скорость света).

## Классические поля.

Классическое поле: лагранжева система с бесконечным числом степеней свободы; вместо $q_i(t)$ имеем $q(t,\mathbf{x})$ – дискретный индекс $i$ заменился на непрерывный $\mathbf{x}$, соответствующий пространственным координатам. Классическая динамика системы задается действием, из которого с помощью вариационного принципа получаются уравнения движения.

Пример: электромагнитное поле $A_\mu(x)$. Действие:

$$S=-\frac{1}{4}\int d^4x\,F_{\mu\nu}F_{\mu\nu},$$

где

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu.$$

Электрическое поле $E_i=F_{0i}$, магнитное поле $H_i=-\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}$.
Уравнения движения: $\partial_\mu F_{\mu\nu}=0$. Тождество Бьянки: $\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\partial_\nu F_{\rho\lambda}=0$.

Калибровочная инвариантность:

$$A_\mu(x)\to A'_\mu(x)+\partial_\mu\alpha(x),$$

$\alpha(x)$ – параметр преобразований, зависящий от точки пространства-времени. Наблюдаемые величины должны быть инвариантны относительно этих преобразований.

## Лагранжев формализм.

**Требования к действию**: локальность (производные не больше второй), инвариантность (в частности, относительно преобразований Лоренца). Свободные поля – линейность уравнений поля.

**Уравнения Эйлера–Лагранжа** (уравнения движения для любых полей $\phi_i$, если $\mathcal{L}$ зависит от $\phi_i$, $\partial_\mu\phi_i$):

$$\partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)}-\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i}=0.$$

**Энергия**:

$$E=\int d^3x\,\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_0\phi_i)}\partial_0\phi_i-\mathcal{L}\right).$$

## Скалярные поля.

Лагранжиан свободного действительного скалярного поля:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2. \tag{1}$$

Уравнения поля – уравнения Клейна-Гордона:

$$\left(\partial_\mu^2 + m^2\right)\phi = 0.$$

Лагранжиан свободного комплексного скалярного поля:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi.$$

Уравнение непрерывности $\partial_\mu j_\mu = 0$ выполнено для тока $j_\mu = i\left(\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*\right)$ (ток сохраняется) на уравнениях движения. Сохраняющийся заряд $Q = \int d^3x\, j_0$: $dQ/dt = 0$.

## Векторные поля.

**Безмассовое векторное** поле – электромагнитное – абелево калибровочное.

Общее решение уравнений Максвелла:

$$A_\mu(x) = A_\mu^\perp + A_\mu^{||},$$

$$A_\mu^\perp = \int d^3k \left(\mathrm{e}^{ikx} e_\mu^\alpha(\mathbf{k}) b_\alpha(\mathbf{k}) + \text{к.с.}\right)\Big|_{k^0 = |\mathbf{k}|}$$

– физические степени свободы,

$$A_\mu^{||} = \int d^4k \left(\mathrm{e}^{ikx} k_\mu c(\mathbf{k}) + \text{к.с.}\right)$$

– чистая калибровка (нефизические степени свободы).

**Выбор калибровки**: изгнать произвол в решении.
Калибровка Кулона: $\partial_i A_i = 0$.
Калибровка Лоренца: $\partial_\mu A_\mu = 0$.

**Массивное векторное поле**:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} B_\mu B_\mu,$$

уравнения движения:

$$\partial_\mu B_{\mu\nu} + m^2 B_\nu = 0,$$

откуда при $m^2 \neq 0$

$$\partial_\nu B_\nu = 0,$$

$$\left(\partial_\mu^2 + m^2\right) B_\nu = 0.$$

Действие и уравнения при $m \neq 0$ не инвариантны относительно калибровочных преобразований.

## Взаимодействие полей с внешними источниками.

**Электромагнитное поле с источником**:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - e j_\mu A_\mu,$$

уравнения движения

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = e j_\nu.$$

Условие самосогласованности $\partial_\mu j_\mu = 0$ обеспечивает калибровочную инвариантность.

**Скалярное поле с источником**:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 + \rho(x) \phi.$$

## Функции отклика – электромагнитная волна в среде.

Линейный отклик среды: $J_\mu^{\mathrm{ind}} = -\Pi_{\mu\nu} A_\nu$.

Уравнение движения для Фурье-компонент $a_\nu$:

$$\left(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu + \Pi_{\mu\nu}\right) a_\nu = j_\mu^{\mathrm{ext}}.$$

Калибровочная инвариантность $\Rightarrow \Pi_{\mu\nu} k_\nu = 0$. Сохранение тока $\Rightarrow k_\mu \Pi_{\mu\nu} = 0$.

Эффективный член в лагранжиане: $-V = -\frac{1}{2} A_\mu \Pi^{\mu\nu} A_\nu$. В вакууме $\Pi^{\mu\nu}$ можно сделать из $g^{\mu\nu}$ и $k^\mu k^\nu$, но оба нарушают калибровочную инвариантность $\Pi k = 0$. В среде можно выделить инерциальную систему отсчета и сконструировать $\Pi$ из 4-скорости среды $u^\mu$ (в системе покоя среды $u = (1, \mathbf{0})$ ).

Пусть $\omega$ и $\mathbf{k}$ – частота и волновой вектор в с.о. среды, тогда $\omega = u \cdot k$, $|\mathbf{k}|^2 \equiv \mathbf{k}^2 = (u \cdot k)^2 - k^2$. Калибровка Лоренца $k \cdot a = 0$. Выберем базис:

(1) $e_\mu^{(g)} \dfrac{k_\mu}{\sqrt{k^2}}$,

(2) $e_\mu^{(L)} \dfrac{\omega k_\mu - k^2 u_\mu}{|\mathbf{k}| \sqrt{k^2}}$,

(3) и (4) – два оставшихся направления, ортогональных к $k_\mu$ и $u_\mu$. Если $\mathbf{k}$ вдоль оси $z$, то удобно выбрать в с.о. среды $e_\pm = (0, (\mathbf{e}_x \pm i \mathbf{e}_y)/\sqrt{2})$.

Определим проекторы $P_a^{\mu\nu} = -e_a^{\mu\nu} e_a^{*\nu}$, где $a = g,\ L,\ +,\ -$. Метрика $g = P_g + P_L + P_+ + P_-$. Калибровочная инвариантность $\Rightarrow$

$$\Pi^{\mu\nu} = \sum_{L,+,-} \pi_a P_a^{\mu\nu}.$$

Из уравнений Максвелла получаем для физических степеней свободы дисперсионные соотношения $k^2 - \pi_a(\omega, \mathbf{k}) = 0$.

**Литература:**

Рубаков, ч.1, §1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 2.4, 1.3, 1.4, 2.3, 2.5, 2.6.
Райдер, §3.2, 3.3.
G.G. Raffelt, Stars as laboratories for fundamental physics, Chapter 6.
Д.А. Киржниц, УФН, 1987, т. 152, вып. 6, с. 399.

## Задачи:

1. Вывести уравнения движения электромагнитного поля из равенства нулю вариации действия. Вывести тождества Бьянки из определения $F_{\mu\nu}$.

2. Показать, что наиболее общий лагранжиан, удовлетворяющий требованиям лоренц-инвариантности, локальности и линейности уравнений поля для скалярного поля $\phi$,
$$\mathcal{L} = a(\partial_\mu \phi)^2 + b\partial_\mu^2 \phi + c\phi\partial_\mu^2 \phi + \frac{m^2}{2}\phi^2 + d \cdot \phi,$$
эквивалентен (1) при $m \neq 0$. Найти размерность констант $a$, $b$, $c$, $d$, $m$.

3. Проверить явным вычислением, что энергия, полученная из лагранжиана действительного скалярного поля, сохраняется ($\frac{dE}{dt} = 0$), если поле $\phi$ достаточно быстро убывает на пространственной бесконечности и удовлетворяет уравнениям поля.

4. Найти число физических степеней свободы электромагнитного и массивного векторного полей в $d$-мерном пространстве-времени.

5. Найти остаточные калибровочные преобразования и общее решение уравнений Максвелла в калибровках: (а) $A_0 = 0$; (б) $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = 0$, где $\mathbf{n}$ – фиксированный единичный 3-вектор, не зависящий от $x$.

6. Найти энергию электромагнитного поля и массивного векторного поля. Объяснить выбор знаков в действии.

7. Найти решение уравнений электромагнитного поля для источников, соответствующих двум покоящимся зарядам: $j_0(\mathbf{x}) = q_1\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + q_2\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)$; $j_i = 0$ (закон Кулона).

8. Найти функционал энергии для электромагнитного поля с источником, если $j_\mu$ не зависит от времени. Выразить энергию через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Найти энергию взаимодействия двух точечных покоящихся зарядов. Показать, что одноименные электрические заряды отталкиваются, а параллельные токи притягиваются.

9. Найти уравнения движения для скалярного поля с внешним источником. Решить их для точечного статического источника $\rho(\mathbf{x}) = q\delta(\mathbf{x})$.

10. Найти функционал энергии для скалярного поля с внешним источником. Найти энергию взаимодействия двух точечных статических скалярных зарядов $q_1$, $q_2$, расположенных на расстоянии $r$ друг от друга. Притягиваются они или отталкиваются? Найти выражение для силы.

11. Решить четыре предыдущие задачи в $d$-мерном пространстве-времени (рассмотреть случаи $d = 2$, $d = 3$ и $d > 4$).

12. Выразить диэлектрическую $\epsilon$ и магнитную $\mu$ проницаемости среды через компоненты $\pi_{T,L}$ тензора поляризации (считать $\pi_+ = \pi_- \equiv \pi_T$).