Скалярный пропагатор:

$$G(x,\tau;x',\tau') = \frac{1}{(2\pi)^3\beta}\sum_n \int d^3p\, e^{i\vec p(\vec x-\vec x')+i\omega_n(\tau-\tau')}\, G(\omega_n,\vec p)$$

$$G(\omega_n,\vec p) = \frac{1}{\vec p^{\,2}+\omega_n^2+m^2}$$ – импульсное предст.

(первый справ. лист из лекций 2018)

Пропагатор фотона:

· Зависит от калибровки. Выберем ковариантную $\partial_\mu A_\mu = 0$ (Евкл. продолжение Лоренцевой калибровки)

· импульс фотона $Q_\mu = (\omega_n, \vec q)$, $Q^2 = \omega_n^2 + \vec q^{\,2}$

$$D^F_{\mu\nu}(\omega_n,\vec q) = \frac{1}{Q^2}\left(\delta_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{Q_\mu Q_\nu}{Q^2}\right)$$

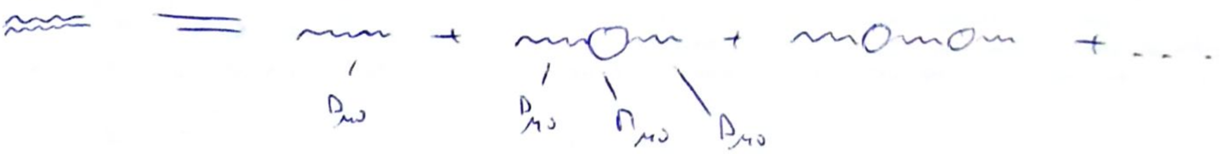
ξ – остат. калибровка.

при $\xi = 1$:

$$D^F_{\mu\nu}(\omega_n,\vec q) = \frac{1}{Q^2}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{Q_\mu Q_\nu}{Q^2}\right)$$ проектор $(P_{\mu\nu})$, $(P_{\mu\nu})^2 = P_{\mu\nu}$

Что хочу посчитать: 1-петлевая поправка к дисперсии фотона (было в 1 части курса похожее)

Напоминание:



В обычной $T=0$ QFT:

$$\Pi_{\mu\nu} \sim \underbrace{\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{K_\mu K_\nu}{K^2}\right)}\Pi(K^2)$$

единств. структура, Лоренц-инвариант. и тождество Уорда, $K_\mu \Pi_{\mu\nu} = 0$

Термальная среда – равновесие по опред. – нет бустов – нет Лоренц-инв., но есть вращательная + калибр. $\to$ $K_\mu \Pi_{\mu\nu} = 0$

Наиболее общий вид $\Pi_{\mu\nu}$:

$$\Pi_{\mu\nu} = F\cdot P^L_{\mu\nu} + G\cdot P^T_{\mu\nu}$$ $\leftarrow$ 2 проектора ортогональных

$$\Pi_{00} = F\cdot\left(\cancel{\delta} - \frac{Q_0Q_0}{Q^2}\right) = F\cdot q^2/Q^2 = F$$ для 0й мац. частоты

$P_{00}^T = P_{0i}^T = 0$, $\quad P_{ij}^T = \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2}$

$P_{\mu\nu}^L = \delta_{\mu\nu} - \frac{Q_\mu Q_\nu}{Q^2} - P_{\mu\nu}^T$ $\qquad (P^T)^2 = P^T \qquad P^T P^L = P^L P^T = 0.$

$(P^L)^2 = P^L$

ф. пропагатор $(\xi = 1)$ $\quad Q^2 D_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - \frac{Q_\mu Q_\nu}{Q^2} = P^L_{\mu\nu} + P^T_{\mu\nu}$

~~ + ~O~ + ~O~O~ + ... ряд легко суммируется.

разделяется на два ряда,

$\sim P^L_{\mu\nu}$ и $\sim P^T_{\mu\nu}$,)

$$D_{\mu\nu}^{1\text{-loop}} = \underbrace{\frac{1}{Q^2 + G}}_{\parallel} P_{\mu\nu}^T + \frac{1}{Q^2 + F} P_{\mu\nu}^L$$

$$\frac{1}{\omega_n^2 + \vec{q}^{\,2} + G}$$ – сравним с проп. для массивного скаляра.

$G = m_э^2$. Если $G \neq 0$, то есть массивная поляризация!

То же для F.

Если переносчик взаимодействия массивный, то вз-е юкавское

$V(r) = \frac{e^{-r/r_0}}{r}$, $r_0 = m_0^{-1}$ короткодействие вместо дальнодействия. Экранировка.

Посчитаем $\Pi_{\mu\nu}$

Заметим, что Π_{00} только при $\delta_{\mu\nu}$ в $P_{\mu\nu}^L$

(т.к. $\omega_n = 0$ для реального фотона)

поэтому $\Pi_{00} = F$

Вычисления $\Pi_{\mu\nu}$

$$\Pi_{\mu\nu} = \frac{2e^2}{(2\pi)^3}\int d^3q \oint \frac{dq_0}{2\pi i}\, \mathrm{tg}\left(\frac{\beta}{2}q_0\right)\frac{2q_\mu q_\nu - \delta_{\mu\nu}(q_0^2+\vec{q}^{\,2}+m^2)}{(q_0^2+\vec{q}^{\,2}+m^2)^2}$$

$$\Pi_{00} = \frac{2e^2}{(2\pi)^3}\int d^3q \int \frac{dq_0}{2\pi i}\, \mathrm{tg}\left(\frac{\beta}{2}q_0\right)\frac{q_0^2-\vec{q}^{\,2}-m^2}{(q_0^2+\vec{q}^{\,2}+m^2)^2} \qquad \vec{q}^{\,2}+m^2=\omega_q^2$$

$$\Pi_{00} = \frac{2e^2}{(2\pi)^3}\int d^3q \underbrace{\int \frac{dq_0}{2\pi i}\, \mathrm{tg}\left(\frac{\beta}{2}q_0\right)\frac{q_0^2-\omega_q^2}{(q_0^2+\omega_q^2)^2}} = I$$

$$I = \int \frac{dq_0}{2\pi i}\underbrace{\mathrm{tg}\left(\frac{\beta}{2}q_0\right)\frac{q_0^2-\omega_q^2}{(q_0+i\omega_q)^2}}_{f(q_0)}\cdot\frac{1}{(q_0-i\omega_q)^2}$$

в полюса 2го порядка

Вычет при полюсе $(q_0=i\omega_q) = f'(q_0)\big|_{\omega_q}$

$$f'(q_0)\big|_{\omega_q} = \frac{\beta}{2}\frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\beta}{2}\omega_q\right)}\frac{-2\omega_q^2}{(2i\omega_q)^2} + i\,\mathrm{th}\left(\frac{\beta}{2}\omega_q\right)\frac{2i\omega_q}{(2i\omega_q)^2} - 2i\,\mathrm{th}\left(\frac{\beta}{2}\omega_q\right)\frac{-2\omega_q^3}{(2i\omega_q)^3} =$$

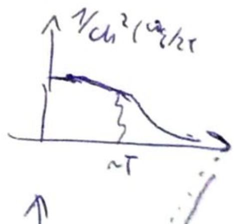
$$= \frac{\beta}{4\,\mathrm{ch}^2\left(\frac{\beta}{2}\omega_q\right)}$$

$$I = \text{// вычеты в 2х полюсах //} = \frac{\beta}{2\,\mathrm{ch}^2\left(\frac{\beta}{2}\omega_q\right)}$$

$$\Pi_{00} = \frac{2e^2}{(2\pi)^3}\int_0^\infty 4\pi q^2\,dq\cdot\frac{\beta}{2\,\mathrm{ch}^2\left(\frac{\beta}{2}\omega_q\right)} \qquad \omega_q=\sqrt{q^2+m^2}$$

$$\boxed{\Pi_{00} = \frac{e^2}{2\pi^2}\frac{1}{T}\int_m^\infty\frac{\sqrt{\omega_q^2-m^2}\,\omega_q\,d\omega_q}{\mathrm{ch}^2(\omega_q/2T)}}$$

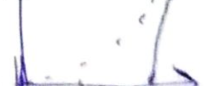
2 случая: $T \ll m$
$T \gg m$



$\underline{T \ll m}$ $\longmapsto$ $m \gg T$ аргумент ch $\gg 1$ всегда.

$\Pi_{00} \sim e^{-m/T}$ — экспонец. подавление.

#ñ1



$\underline{T \gg m}$ можно пренебречь m $\boxed{3}$

$$\Pi_{00} = \frac{e^2}{2\pi^2}\,\frac{1}{T}\int_0^\infty \frac{\omega_q^2\, d\omega_q}{ch^2(\omega_q/2T)} = \frac{e^2}{2\pi^2}\cdot T^2 \cdot 2^3 \cdot \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{ch^2 x}}_{\pi^2/12} =$$

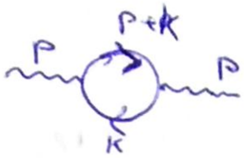
$$= \frac{e^2}{2\pi^2}\cdot T^2 \cdot 2^3 \cdot \frac{\pi^2}{4\cdot 3} = \frac{e^2 T^2}{3}$$

Ответ из Schmitt $\quad m^2 = \frac{e^2 T^2}{3}$

[2]

[1]

$$\Pi_{\mu\nu} = e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta}\sum_{n'} \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \frac{-i(\hat p+\hat k)+m}{(p+k)^2+m^2}\,\gamma^\nu \frac{(-i\hat k+m)}{k^2+m^2}\right] =$$



$k^2 = k_0^2 + \vec k^2$,

$k_0 = \frac{2\pi}{\beta} n'$, $n' = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots$

$p \ll m, T$

$\Rightarrow r$ на дальних расст.

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu \hat k \gamma^\nu \hat k] = 4[2k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2]$$
$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4\delta_{\mu\nu}$$

$$\Pi_{\mu\nu}(p\to 0) = -e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \beta \sum_{n'} \frac{4(2k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu}(k_0^2+\vec k^2+m^2))}{(k_0^2(n')+\vec k^2+m^2)^2}$$

$$\beta\sum_{n'} = \oint \frac{dk_0}{4\pi i}\, \mathrm{tg}\left(\frac{\beta}{2}k_0\right) \qquad \Big\|\ \sum_{n'} u(n') = \frac{1}{2i}\oint \mathrm{tg}\,\pi z\, u(z)\,dz$$

$$\Pi_{\mu\nu}(p\to 0) = -2e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \oint \frac{dk_0}{2\pi i}\, \mathrm{tg}\left(\frac{\beta k_0}{2}\right) \frac{2k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu}(k_0^2+\vec k^2+m^2)}{(k_0^2+\vec k^2+m^2)^2}$$

$$\Pi_{00}(p\to 0) = -2e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \oint \frac{dk_0}{2\pi i}\, \mathrm{tg}\left(\frac{\beta k_0}{2}\right) \frac{k_0^2-\vec k^2-m^2}{(k_0^2+\vec k^2+m^2)^2} = I$$

$$I = \int \frac{dk_0}{2\pi i} \underbrace{\mathrm{tg}\left(\frac{\beta}{2}k_0\right) \frac{k_0^2-\omega_k^2}{(k_0+i\omega_k)^2}}_{f(k_0)} \frac{1}{(k_0-i\omega_k)^2} \Bigg|\ \omega_k^2 = k^2+m^2$$

возьмем в полюсе.

вычет 2-го порядка при полюсе $(k_0 = i\omega_k) = f'(k_0)\big|_{\omega_k}$

$$f'(k_0)\big|_{\omega_k} = \frac{\beta}{2}\frac{1}{\cos^2(\frac{\beta}{2}i\omega_k)} \frac{-2\omega_k^2}{(2i\omega_k)^2} + \cancel{\mathrm{tg}\left(\frac{\beta}{2}i\omega_k\right)\frac{2i\omega_k}{(2i\omega_k)^2}} - \cancel{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\beta}{2}i\omega_k\right)\cdot\frac{-2\omega_k^2}{(2i\omega_k)^3}} = \frac{\beta}{4\,\mathrm{ch}^2(\frac{\beta}{2}\omega_k)}$$

$\Big|\times 2$ полюса

$$\Pi_{00}(p\to 0) = -2e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\cdot \frac{\beta}{2\,\mathrm{ch}^2(\frac{\beta}{2}\omega_k)}$$

[2]

$$\Pi_{00}(p\to 0) = -\frac{e^2}{2\pi^2}\beta\int_0^\infty \frac{k^2\,dk}{ch^2(\frac{\beta}{2}\omega_k)}, \quad \omega_k=\sqrt{k^2+m^2}$$

$$= -\frac{e^2}{2\pi^2}\frac{1}{T}\int_m^\infty \frac{\sqrt{\omega_k^2-m^2}\,\omega_k\,d\omega_k}{ch^2(\omega_k/2T)}$$

- $T \ll m$ ⇒ аргумент $ch \gg 1$ всегда.

  $\Pi_{00} \sim e^{-m/T}$ – экспоненц. подавление.

- $T \gg m$, пренебрежем m

$$\Pi_{00} = \frac{e^2}{2\pi^2}\frac{1}{T}\int_0^\infty \frac{\omega_k^2\,d\omega_k}{ch^2(\omega_k/2T)} = \frac{e^2}{2\pi^2}T^2 2^3 \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{ch^2 x}}_{\pi^2/12} = -\frac{e^2T^2}{3}$$

$$m_D^2 = \frac{e^2T^2}{3}$$ – дебаевская масса.

$\Pi_{0i} \xrightarrow[(p\to 0)]{} 0$, $\Pi_{ij} \xrightarrow[(p\to 0)]{} 0$ – 0

$$V(r) = -e^2\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\vec q\vec r}}{q^2+m_D^2} = -e^2\int_0^\pi \frac{\sin\theta\,d\theta\int q^2\,dq}{(2\pi)^2}\frac{e^{iqr\cos\theta}}{q^2+m_D^2} =$$

$$= -\frac{e^2}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{q^2\,dq}{q^2+m_D^2}\underbrace{\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\,e^{iqr\cos\theta}}_{} \ominus$$

$$= \int_{-1}^{1} dx\,e^{-iqrx} = \frac{i}{qr}\left(e^{-iqr}-e^{iqr}\right)$$

$$\ominus\ \frac{ie^2}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\frac{q^2\,dq}{q^2+m_D^2}\frac{1}{qr}\left(e^{iqr}-e^{-iqr}\right) =$$

$$= \frac{ie^2}{(2\pi)^2}\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{q\,dq}{q^2+m_D^2}e^{iqr} = \frac{ie^2}{(2\pi)^2 r}\,2\pi i\,\frac{im_D}{2im_D}e^{-m_Dr} =$$

$q_{res} = im_D$

$$= -\frac{e^2}{4\pi}\frac{e^{-m_Dr}}{r}$$ Дебаевская экранировка.

$$D_{\mu\nu}^{1\text{-loop}} = \frac{P^L_{\mu\nu}}{Q^2+m_D^2} + \frac{P^T_{\mu\nu}}{Q^2}$$

← $q=0$.