Лекция 16.

Повторение.

Из эфф. действия $S_{eff} = \int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\, e^{-ism^2}\, Tr\langle x|\, e^{-i\hat{H}s}|x\rangle\right.$

получили действие Эйлера-Гейзенберга, $\hat{H} = -(\hat{p}^\mu - eA^\mu)^2 + \frac{e}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$

$$\mathcal{L}^{ren}_{eff\,E\text{-}H} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2}{32\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\, e^{-m^2 s}\left[\frac{Re\, ch(esX)}{Im\, ch(esX)}\, F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} + \underbrace{\frac{4}{e^2 s^2} + \frac{2}{3}F_{\mu\nu}^2}_{\text{контр члены}}\right]$$

$$X^2 = \frac{1}{2}\left(F_{\mu\nu}^2 - i F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\right)$$

Если в качестве поля $F_{\mu\nu}$ взять пост. электр. поле $\vec{E}$, то $\mathcal{L}_{EH}$ имеет ненулевую мнимую часть,

$$Im\, \mathcal{L}_{EH} = \frac{\alpha E^2}{2\pi^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\, e^{-n\pi m^2/eE}$$

$n = 1$ осн. вклад, ост. ещё более подавлены

Что из этого следует? (из $Im\, \mathcal{L}_{eff} \neq 0$)

производящий функционал в теории поля

$$Z = \int DA_\mu\, e^{iS_{eff}[A_\mu]} = \int DA_\mu\, e^{i\int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x\, \mathcal{L}_{eff}[F_{\mu\nu}]}$$

$$Z = \langle \Omega, t_f | \Omega, t_i \rangle$$

$$A_\mu = A_\mu^{cl} \longmapsto Z = e^{i(t_f - t_i)\cdot V \cdot \mathcal{L}_{eff}[F_{\mu\nu}]} = \langle \Omega, t_f | \Omega, t_i \rangle$$

$$|\langle \Omega, t_f | \Omega, t_i \rangle|^2 = e^{i(t_f - t_i)\cdot V\left(\mathcal{L}_{eff}[F_{cl}] - \mathcal{L}^*_{eff}[F_{cl}]\right)}$$

если вакуум стабилен, и наоборот то $|\langle\Omega|\Omega\rangle|^2 \ \forall t \Rightarrow Im\, \mathcal{L}_{eff} = 0$

если $Im\, \mathcal{L}_{eff}[F_{cl}] \neq 0$, то $|\langle\Omega|\Omega\rangle|^2 = e^{-\underbrace{2T\cdot V\cdot Im\, \mathcal{L}_{eff}}_{\text{малое, разложим}}}$

$$|\langle\Omega|\Omega\rangle|^2 = 1 - \underbrace{2V\cdot T\cdot Im\, \mathcal{L}_{eff}[F_{cl}]}$$

вер-ть что за время T вакуум ~~останется вакуумом~~

вер-ть, что вакуум распадётся

~~Оптическая теорема~~

~~[illegible]~~

В эфф. теории нет таких процессов, из-за кот это происходит. Эфф. теория неунитарна. На самом деле рождаются e^+e^- пары.

- Ничего не предполагали про рождение пар, получили неунитарность теории.
- Не очень наглядно. Понятно что физически получается.
- Можно сделать используя точные решения ур. Дирака в эл. поле и ...

130/5105

Рассм. другой метод, который, как окажется, прямо описывает туннельное рождение электрон-позитронной пары

- Стартуем с эфф. лагранжианом в операторной форме, $is \mapsto s$ (как было изначально, $\frac{1}{\hat{A}} = \int_0^\infty ds\, e^{-\hat{A}s}$)

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-sm^2}\, \mathrm{Tr}_\gamma \langle x| e^{-\hat{H}s} |x\rangle$$

$$\hat{H} = -(\hat{p}^\mu - e\hat{A}^\mu)^2 + \frac{e}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$$ сумм. с метрикой $(1,-1,-1,-1)$

$\sigma^{\mu\nu} = [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$

$$\hat{H}_{scalar} = -(\hat{p}^\mu - e\hat{A}^\mu)^2$$

Tr нетривиально действ. только на этот член вклад.

$\langle x|e^{-\hat{H}s}|x\rangle \cdot \mathrm{Tr}\, e^{-eF_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}s}$

в главном порядке по e $\mathrm{Tr} = 4$

$$\langle x| e^{-\hat{H}_s s}|x\rangle =$$

$$= \int\limits_{\substack{y_\mu(0)=x\\ y_\mu(s)=x}} Dy_\mu\, e^{-\int_0^s d\tau\, \mathcal{L}_E} \qquad \mathcal{L}_E = \left(-\frac{\dot{y}_\mu^2}{4} - ieA_\mu \dot{y}_\mu\right)$$

$$\mathcal{L}_{eff}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + 2i\int_0^\infty \frac{ds}{s}\int\limits_{\substack{y_\mu(0)=x\\ y_\mu(s)=x}} Dy_\mu\, e^{-m^2 s - \int_0^s d\tau\left(-\frac{\dot{y}_\mu^2}{4} - ieA_\mu \dot{y}_\mu\right)}$$

Дальше: берём интеграл в квазиклассическом приближении (седловой метод): вычисляем седловую точку — — решение уравнений движения, потом вычисляем экспоненту на этом решении. Седловые интегралы по y_μ и по s.

- Возьмём сначала седловой интеграл по s.

$$\mathcal{L}_{eff}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + 2i\int_0^\infty \frac{ds}{s}\int\limits_{\substack{y_\mu(0)=x\\ y_\mu(s)=x}} Dy_\mu\, e^{-m^2 s - \int_0^1 d\tau\left(-\frac{\dot{y}_\mu^2}{4s}\right) - i\int_0^1 d\tau\, eA_\mu \dot{y}_\mu}$$

седло по s: $\quad -m^2 + \dfrac{\int_0^1 d\tau(-\dot{y}_\mu^2)}{4s^2} = 0 \qquad s_* = \dfrac{\sqrt{\int_0^1 d\tau(-\dot{y}_\mu^2)}}{2m}$

$$\mathcal{L}_{eff}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + 2i\int_0^\infty \frac{ds}{s}\int\limits_{\substack{y_\mu(0)=x\\ y_\mu(1)=x}} Dy_\mu\, e^{-m\sqrt{\int d\tau(-\dot{y}_\mu^2)} - i\int_0^1 d\tau\, eA_\mu \dot{y}_\mu}$$

p.b.c.

варьируем $m\sqrt{\int d\tau(-\dot{y}_\mu^2)} + i\int_0^1 d\tau\, eA_\mu \dot{y}_\mu$ по y_μ

$$\frac{m}{2\sqrt{\ }}\left(2\int_0^1 d\tau(-\dot y_\mu\, \delta\dot y_\mu)\right) + i\int_0^1 d\tau\, e\left(A_\mu\, \delta\dot y_\mu + \partial_\nu A_\mu\, \dot y_\mu\, \delta y_\nu\right) =$$

$$= \frac{m}{\sqrt{\ }}\left(\int_0^1 d\tau\, \ddot y_\mu\, \delta y_\mu\right) + ie\int_0^1 d\tau\left(-\partial_\nu A_\mu\, \dot x_\nu\, \delta y_\mu + \partial_\mu A_\nu\, \dot y_\nu\, \delta y_\mu\right)$$

$$\frac{m}{\sqrt{\ }}\ddot y_\mu\, \delta y_\mu + ieF_{\mu\nu}\,\dot y_\nu\, \delta y_\mu = 0$$

! Важно $\dot y_\mu\, \delta y_\mu = \dot y_0\, \delta y_0 - \dot y_1\, \delta y_1$

сумм. с метрикой

$F_{01} = E$

$F_{10} = -E$

$$R = \frac{m}{\sqrt{\ }}\ddot y_0 + ieE\dot y_1 = 0$$
$$-\frac{m}{\sqrt{\ }}\ddot y_1 - ieE\dot y_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot y_0 = -\frac{ieE}{m}\sqrt{\int_0^1 d\tau(-\dot y_0^2+\dot y_1^2)}\;\dot y_1$$
$$\ddot y_1 = -\frac{ieE}{m}\sqrt{\int_0^1 d\tau(-\dot y_0^2+\dot y_1^2)}\;\dot y_0$$

$$y_0 = i\, y_0^E$$

$$\ddot y_0^E = -\frac{eE}{m}\overbrace{\sqrt{\int d\tau(\dot y_0^{E\,2}+\dot y_1^2)}}^{=R}\;\dot y_1$$
$$\ddot y_1 = \underbrace{\frac{eE}{m}\overbrace{\sqrt{\int d\tau(\dot y_0^{E\,2}+\dot y_1^2)}}^{=R}}_{\omega}\;\dot y_0$$

$\cancel{y_0^E = A\sin B\tau}$ $\cancel{\dot y_0^E = AB\cos B\tau}$

$\cancel{y_1^E = A\cos B\tau}$ $\cancel{\ddot y_0^E = -AB^2\cos B\tau}$

$$\ddot y_0 = -\omega\dot y_1$$
$$\ddot y_1 = \omega\dot y_0$$

$$\dddot y_1 = \omega\ddot y_0 = \omega(-\omega\dot y_1)$$

$\dot y_1 = A\sin(\omega\tau+\varphi_0)$ $\qquad \dot y_0 = A\cos(\omega\tau+\varphi_0)$

$y_1 = -\frac{A}{\omega}\cos(\omega\tau+\varphi_0)$ $\qquad y_0 = \frac{A}{\omega}\sin(\omega\tau+\varphi_0)$

$\ddot y_1 = A\omega\cos(\omega\tau+\varphi_0) = \omega\dot y_0$

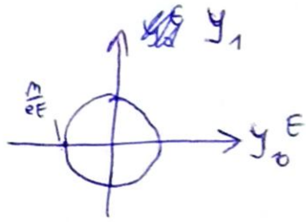
$$\dot y_0^2 + \dot y_1^2 = A^2 = R^2$$

$$\omega = \frac{eER}{m} = 2\pi n$$

$$R = 2\pi n\cdot\frac{m}{eE}$$

$y_0 = \frac{m}{eE}\cdot\sin$

$y_1 = \frac{m}{eE}(-\cos)$

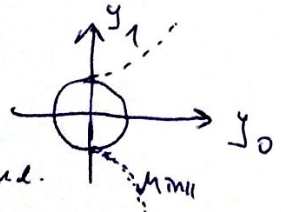


$$S = mR + i\int d\tau\, e A_1 \dot y_1 =$$
$$= i\int d\tau\, e(E\cdot y_0\cdot \dot y_1)$$
$$= i\int d\tau\left(eE\left(\frac{R^2}{\omega}\sin^2\right)\right) =$$
$$= mR - \frac{R^2}{2\pi\cdot 2}eE = 2\pi\cdot\frac{m^2}{eE} - \frac{(2\pi)^2\cdot m^2}{4\pi\,(eE)^2}eE = \frac{\pi m^2}{eE}$$

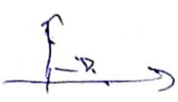
$$\mathrm{Im}\, S_{eff} = \mathrm{Im}\int d^4x_E^0\int d^3x\cdot 2\frac{1}{s_0}\frac{1}{\sqrt{\det\frac{\delta^2 S}{\delta x\,\delta x}}}\, e^{-m^2\pi/eE}$$

$$y_\mu = y_\mu^{cl} + \delta y_\mu$$

интерпретация:



y $\qquad \int \to i\int$



~~распад~~ ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

рождение монополей

в магн. поле.

Дионы, [illegible] ...

Заряженные струны...

Распад фотона во внешнем э/м поле — квазиклассическое вычисление.

$\gamma \sim$ $\uparrow \vec{E}(\vec{B})$ A_μ^{cl}

Оптическая теорема:

$$\Gamma_{\gamma\to e^+e^-} = \frac{1}{2\omega}\,\epsilon_\mu(k)\,\epsilon_\nu(k)\,\mathrm{Im}\,\Pi_{\mu\nu}(k)$$

разрезание диагр. $\mathrm{Im}\, M(\gamma\to\gamma) \sim \Gamma(\gamma\to e^+e^-)$

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = \mathrm{Tr}\,(\gamma_\mu S(x-y)\,\gamma_\nu S(y-x))$$

→ пропагаторы в предст. ф. инт.

на уровне волн.

A $\mathcal{L}_{int} = ie\bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)$ $\qquad Z = \int D\bar\psi\, D\psi\, DA_\mu\, e^{-\int d^4x(\mathcal{L}^{(2)} + ie\bar\psi\gamma^\mu\psi A_\mu)}$

$$\langle\gamma|A_\mu(x)\; ie\bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x)\cdot ie\bar\psi(y)\gamma^\mu\psi(y)\,A_\mu(y)|\gamma\rangle =$$

$$= \ldots \quad \Pi_{\mu\nu}(x-y) = \frac{\delta}{i\delta A_\mu(x)}\frac{\delta}{i\delta A_\nu(y)}\, Z$$

$$\mathrm{Im}\,\Pi_{\mu\nu}(k) \propto \mathrm{Im}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\int_{p.b.c.} Dx_\mu \oint d\tau_1 \oint d\tau_2\; \dot x_\mu(\tau_1)\,\dot x_\nu(\tau_2)\, e^{-S_{inf}[x,\tau_1,\tau_2]}$$

$$S_{in}(x,\tau_1,\tau_2) = m^2 s + \int_0^1 ds\left(\frac{\dot x_\mu^2}{4s} + ieA_\mu \dot x_\mu\right) - ik_\mu(x_\mu(\tau_1) - x_\mu(\tau_2))$$

$$\boxed{Z = Z_0\, e^{-\int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-m^2 s}\int_{p.b.c.} Dx_\mu\, e^{-\int_0^s d\tau}}}$$

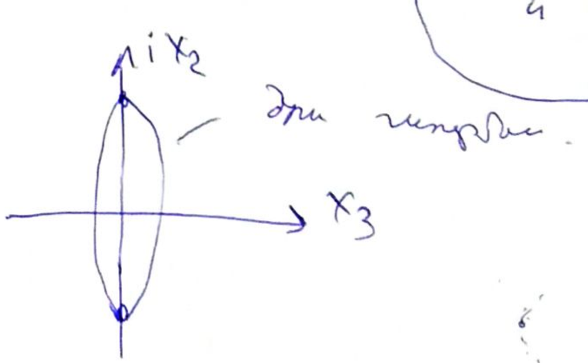
$$\frac{\dot x_\mu^2}{4} + ie\dot x_\mu A_\mu$$

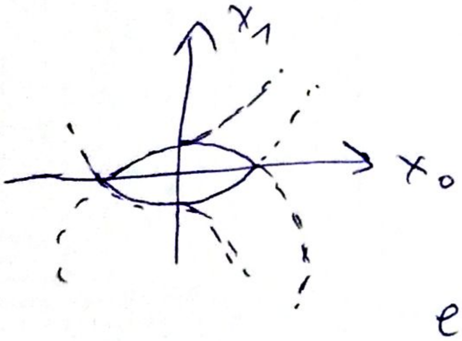
Есть замкнутое решение при $\tau_1 - \tau_2 = 1/2$

$x_0 = \omega s(\tau - 1/2)$

$x_2 = -iA\,\mathrm{sh}\,\eta(\tau - 1/4)$

$x_3 = -A\,[\mathrm{ch}\,\eta(\tau - 1/4) - \mathrm{ch}\,\eta/4]$





$$e^{-\frac{8m^3}{3\omega eH}}$$