Лагранжиан Эйлера-Гейзенберга

Повторение.

$$G_\psi(x,y) = \int_0^\infty ds\, e^{-ism^2} \langle x | ((\hat p \gamma) - e(\hat A \gamma) + m) e^{-i\hat H s} | y \rangle$$

$$\hat H = -(\hat p^\mu - eA^\mu(\hat x))^2 + \frac{e}{2} F_{\mu\nu}(\hat x)\sigma^{\mu\nu} = -(\hat p^\mu \gamma_\mu - e A^\mu \gamma_\mu(\hat x))^2$$

$$S_{eff} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \mathrm{Tr}_\gamma \left[\langle x | e^{-i\hat H s} | x\rangle\right]\right]$$

Вычислим $\mathrm{Tr}\langle x | e^{-i\hat H s}|x\rangle$

вставим полный набор $\sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$

$|\psi_n\rangle$ - собств. сост. $\hat H$ $\quad \hat H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$

$$\langle x | e^{-i\hat H s}|x\rangle = \sum_n \langle x|\psi_n\rangle\langle\psi_n| e^{-i\hat H s}|x\rangle = \sum_n |\psi_n(x)|^2 e^{-iE_n s}$$

- Const. magn. field $\vec B \parallel z$ $\quad A_y = B\hat x$

$$\hat H = [-\hat p_t^2 + \hat p_x^2 + \hat p_z^2 + (\hat p_y - eB\hat x)^2]\,\mathbb{1}_{4\times4} - eB\begin{pmatrix}\sigma_z & 0\\ 0 & \sigma_z\end{pmatrix}$$

$$\psi_n^{p_t,p_y,p_z} = \chi_n\left(x - \frac{p_y}{eB}\right) e^{ip_t t - ip_y y - ip_z z} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$E_n^{p_t,p_y,p_z} = -p_t^2 + p_z^2 + eB(2n+1) - 2eB\lambda \qquad \lambda = \pm 1/2,\ n = 0,1,2,\ldots$$

($n=0$, $\lambda=+1/2$ - нулевой уровень невырожденный)

$$\mathrm{Tr}\langle x|e^{-i\hat H s}|x\rangle = \overset{\text{из Tr}}{2}\int \frac{dp_t\, dp_y\, dp_z}{(2\pi)^3}\sum_{n=0}^\infty \sum_{\lambda=\pm1/2} |\chi_n(x - p_y/eB)^2| \cdot e^{-i(p_z^2 - p_t^2)s} \cdot e^{-iseB(2n+1)} \cdot e^{2ieB\lambda s}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp_y\, |\chi_n(x - p_y/eB)|^2 = eB \qquad (\text{т.к. } \chi_n \text{ - нормированные})$$

$$\sum_{\lambda=\pm1/2} e^{2ieB\lambda s} = 2\cos(esB)$$

$$\sum_{n=0}^\infty e^{-iseB(2n+1)} = e^{-iseB}\cdot\frac{1}{1-e^{-2iesB}} = \frac{1}{2i}\cdot\frac{2i}{e^{iseB} - e^{-iseB}} = -\frac{i}{2\sin(esB)}$$

$$\int dp_t\, dp_z\, e^{-i(p_z^2 - p_t^2)s} = \frac{\pi}{s}$$

$$\mathrm{Tr}\langle x|e^{-i\hat H s}|x\rangle = \frac{-2i}{8\pi^3}\cdot\frac{\pi}{s}\cdot eB\,\frac{\cos(esB)}{\sin(esB)}$$

$$= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{eB}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2 - s\epsilon} \frac{1}{s}\frac{\cos(eBs)}{\sin(eBs)}$$

В элект. поле $\vec{B} \to i\vec{E}$

В произвольном э-м поле (без вывода):

не использовали теор. возмущ. по e, т.е. точно пос

$$\boxed{\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2}{32\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2 - s\epsilon} \frac{\mathrm{Re}\cos(esX)}{\mathrm{Im}\cos(esX)} F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}}$$

где $X = \sqrt{\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^2 - \frac{i}{2}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}}$ $\qquad \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F^{\rho\lambda}$ $\qquad \sim -4(\vec{E}\cdot\vec{B})$

$X = \sqrt{(\vec{B} + i\vec{E})^2}$

не сходится если $E=0$ сразу надо маленькое E, потом сокр.

"Поворот в Евклид" в собств. времени s $\qquad s \to -is$

ϵ уже не нужно для сходимости.

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2}{32\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-sm^2} \frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{ch}(esX)}{\mathrm{Im}\,\mathrm{ch}(esX)} F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$$

Разложение по малым e:

$$\mathrm{ch}(esX) = 1 + \frac{(esX)^2}{2!} + \frac{(esX)^4}{4!} = 1 + \frac{(es)^2}{2}\frac{F^2 - iF\tilde{F}}{2} + \frac{(es)^4}{4!}\frac{(F^2 - iF\tilde{F})^2}{4} + \frac{(es)^6}{6!}\frac{(F^2 - iF\tilde{F})^3}{8} + \ldots$$

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{ch}(esX) = 1 + \frac{(es)^2 F^2}{4} + \frac{(es)^4}{4\cdot 4!}\left((F^2)^2 - (F\tilde{F})^2\right)$$

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{ch}(esX) = -\frac{(es)^2}{4}F\tilde{F}\left(1 + \frac{(es)^2}{4!}2F^2\right) + \frac{(es)^6}{8\cdot 6!}\left(-3F^4 F\tilde{F} + (F\tilde{F})^3\right)$$

$$\frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{ch}(esX)}{\mathrm{Im}\,\mathrm{ch}(esX)} F\tilde{F} = \ldots = -\frac{4}{(es)^2} - \frac{2}{3}F^2 + \frac{(es)^2}{45}\left[(F^2)^2 + \frac{7}{4}(F\tilde{F})^2\right] + \ldots$$

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2}{32\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-m^2 s}\left[-\frac{4}{(es)^2} - \frac{2}{3}F_{\mu\nu}^2 + \frac{(es)^2}{45}\left((F^2)^2 + \frac{7}{4}(F\tilde{F})^2\right)\right]$$

расх. конст.

расходящаяся добавка к кин. члену (убирается перенормировкой A)

$$\int_0^\infty e^{-m^2 s} s\,ds = \frac{1}{m^4}$$

$$\mathcal{L}^{ren}_{EH} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{e^4}{32\pi^2\cdot 45}\int_0^\infty ds\cdot s\, e^{-m^2 s}\left[(F_{\mu\nu}^2)^2 + \frac{7}{4}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})^2\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{e^4}{45\cdot 32\pi^2 m^4}\left[(F_{\mu\nu}^2)^2 + \frac{7}{4}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})^2\right]$$

$$\boxed{\mathcal{L}_{E-H} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{\alpha^2}{45\cdot 2m^4}\left[(F_{\mu\nu}^2)^2 + \frac{7}{4}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})^2\right]}$$

Использовалось разложение по $esX \ll 1$

Эл. поле E: $X = iE$

магн. поле B: $X = B$

S – из интеграла $\int_0^\infty e^{-m^2 s} s\, ds$ – набирается при $s \sim 1/m^2$

при $s \gg 1/m^2$ эксп. хвост.

Верно при $eE \ll m^2$, $eB \ll m^2$ $\qquad \mathcal{L}_{E-H}$ – первый член разложения

(знаем, что $eB \gg m^2$ бывает, тогда E-H не применим)

$$E \sim \frac{m^2}{e} = E_{cr}$$

След. член. $\alpha^3[(F^2)^3 + (F^2)^2 F\tilde{F} \quad F^2(F\tilde{F}) \quad (F\tilde{F})^3$

Перенормированный лагранжиан

$$\boxed{\mathcal{L}^{ren}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2}{32\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-m^2 s}\left[\frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{ch}(esX)}{\mathrm{Im}\,\mathrm{ch}(esX)}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{4}{e^2 s^2} + \frac{2}{3}F_{\mu\nu}^2\right]}$$

- При выводе эфф. лагранжиана A_μ не квантовалось – можно расс. как классическое поле. Например, уравнения движения – нелинейные ур-я Максвелла. Если мы имеем дело с классическими решениями большой амплитуды, надо принять во внимание нелинейности.

- Можно расс. $F_{\mu\nu} = F^{cl}_{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu}$ — квант.

  в пустоте $F_{\mu\nu} = 0 \to$ только $\delta F_{\mu\nu}$ – пред. фотон.

Можно считать ф. диаграммы согласно $\mathcal{L}_{E-H}$.

Пример: $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$

Эффект Швингера из лагранжиана Эйлера-Гейзенберга.

$$\boxed{\mathcal{L}^{ren}_{E-H} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2}{32\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-m^2 s}\left[\frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{ch}\,esX}{\mathrm{Im}\,\mathrm{ch}\,esX} F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{4}{e^2 s^2} + \frac{2}{3}F_{\mu\nu}^2\right]}$$

$$X^2 = \frac{1}{2}\left(F_{\mu\nu}^2 - iF^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\right)$$

Возьмём $\vec{B} \parallel \vec{E}$. $\rightarrow$ $F_{\mu\nu}^2 = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) = 2(B^2 - E^2)$

$$F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = -4\vec{E}\cdot\vec{B} = -4EB$$

$$X^2 = (B+iE)^2, \quad X = B + iE$$

$$\mathrm{ch}\,esX = \mathrm{ch}(esB + iesE) = \mathrm{ch}\,esB\cos esE + i\,\mathrm{sh}\,esB\sin esE$$

$$\frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{ch}\,esX}{\mathrm{Im}\,\mathrm{sh}\,esX} = +\mathrm{cth}\,esB\cdot\mathrm{ctg}\,esE$$

$$\mathcal{L}_{E-H} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2) - \frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s}e^{-m^2 s}\left[EB\,\mathrm{ctg}\,esE\,\mathrm{cth}\,esB - \frac{1}{e^2 s^2} - \frac{B^2 - E^2}{3}\right]$$

$B \to 0$

$$\mathcal{L}_{E-H} = \frac{E^2}{2} - \frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s}e^{-m^2 s}\left[\frac{E\cancel{B}}{es\cancel{B}}\,\mathrm{ctg}\,esE - \frac{1}{e^2 s^2} + \frac{E^2}{3}\right]$$

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{E^2}{2} - \frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^3}e^{-m^2 s}\left[eEs\,\mathrm{ctg}\,eEs - 1 + \frac{1}{3}(eEs)^2\right]$$

$\mathrm{ctg}\,eEs$ имеет полюса 1-го рода при $s_n = \frac{\pi n}{eE}$

при $n=0$ нет полюса, т.к.

$\cancel{eEs\frac{\cos eEs}{\sin eEs}}$ $\quad \mathrm{ctg}\,eEs = \dfrac{1 - (eEs)^2/2}{eEs(1 - (eEs)^2/6)} =$

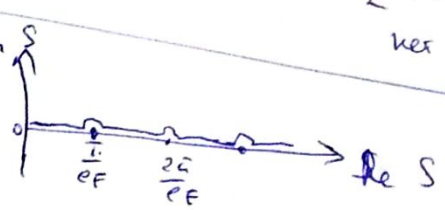
$$= \frac{1}{eEs}\left(1 - \frac{(eEs)^2}{3}\right)$$

$[\ldots] = O(eEs)^4$ нет полюсов.

$$\mathrm{Res}\; eE\int_0^\infty \frac{ds}{s^2}e^{-m^2 s}\cdot\mathrm{ctg}\,eEs$$

$$= \int \frac{ds}{s^2}e^{-m^2 s_n}\frac{\cos eEs}{\sin eEs} =$$

$$= \sum_n \frac{e^{-m^2 s_n}}{s_n^2}\underbrace{\cos eEs_n}_{(-1)^n}, \quad s_n = \frac{\pi n}{eE}$$



$$\mathrm{Im}\,\mathcal{L}_{EH} = -\frac{eE}{8\pi^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n (eE)^2}{\pi^2 n^2}e^{-\frac{m^2\pi n}{eE}}\cdot\pi\,\frac{1}{eE}$$

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{L}_{EH} = \frac{e^2E^2}{8\pi^3}\sum_n \frac{1}{n^2}e^{-\frac{\pi m^2}{eE}\cdot n}$$