Пропагатор комплексного скалярного поля во внешнем ЭМ поле. Операторное представление.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + D_\mu\varphi^* D_\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi =$$

$$= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \varphi^* \underbrace{(D_\mu^2 + m^2)}_{\hat{M}}\varphi \qquad D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x)$$

$\hat{M}$ оператор в квадратичн. действии $\qquad \partial_\mu = -i\hat{p}_\mu$

пропагатор скалярных электронов

$$i\hat{M}\,G(x,y) = \delta(x-y)$$

введём гильбертово пр-во $|x\rangle, |p\rangle \qquad \hat{M} \ni \hat{x}_\mu, \hat{p}_\mu$

$$\delta(x-y) = \langle x|y\rangle$$

$$G(x,y) = \langle x|\hat{G}|y\rangle$$

$$\hat{M}\langle x|\hat{G}|y\rangle = \langle x|y\rangle$$

$$\hat{D}_\mu = -i(\hat{p}_\mu - eA_\mu(\hat{x}))$$
$$\hat{D}_\mu^2 = -(\hat{p}_\mu - eA_\mu(\hat{x}))^2$$
$$M^2 = D_\mu^2 + m^2$$

$$\int d^4x\,\langle z|\hat{M}|x\rangle\langle x|\hat{G}|y\rangle = \int d^4x\,\langle z|x\rangle\langle x|y\rangle$$

$$\langle z|\hat{M}\hat{G}|y\rangle = -i\langle z|\hat{1}|y\rangle$$

$$\hat{G} = -i\hat{M}^{-1} = \int_0^\infty ds\, e^{-is\hat{M}}$$

$$G(x,y) = \langle x|\hat{G}|y\rangle$$

$$G(x,y) = \langle x|\frac{i}{(\hat{p}-eA(\hat{x}))^2 - m^2 + i\varepsilon}|y\rangle = \int_0^\infty ds\,e^{-s\varepsilon - ism^2}\langle y|e^{-i\hat{H}s}|x\rangle$$

$$\hat{H} = -(\hat{p}_\mu - eA_\mu(\hat{x}))^2 \qquad \mu = 0..3$$

Спиноры

$$(\gamma^\mu D_\mu)^2 = D_\mu^2 + \frac{e}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}, \qquad \sigma^{\mu\nu} = [\gamma^\mu,\gamma^\nu]$$

$$(\gamma\hat{p} - e\gamma\hat{A}(x))^2 = (\hat{p} - e\hat{A}(x))^2 - \frac{e}{2}F_{\mu\nu}(x)\sigma^{\mu\nu}$$

$$\hat{G}_\psi = \frac{i}{\gamma^\mu\hat{p}_\mu - e\gamma^\mu A_\mu(x) - m + i\varepsilon} = i\,\frac{(\gamma\hat{p}) - e(\gamma A(x)) + m}{(\hat{p} - eA(\hat{x}))^2 - \frac{e}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} - m^2 + i\varepsilon}$$

$$\overset{*}{G}_{\varphi}(x,y) = \langle x | \frac{i}{(\gamma p) - e(\gamma A(x)) - m + i\varepsilon} | y \rangle =$$

$$= \int_0^\infty ds\, e^{-s\varepsilon} e^{-ism^2} \langle x | ((\hat{p}\gamma) - e(\hat{A}\gamma) + m) e^{-i\hat{H}s} | y \rangle$$

$$\hat{H} = -(\hat{p}^\mu - eA^\mu(x))^2 + \frac{e}{2} F_{\mu\nu}(\hat{x}) \sigma^{\mu\nu}$$

Как вычислить матричные элементы $\langle x | e^{-i\hat{H}s} | y \rangle$?

$=$ амплитуда перехода $\langle x, s | y, 0 \rangle$

I. 1. Решить операторные ур-я $\frac{d\hat{x}_\mu}{ds} = -i[\hat{x}_\mu, \hat{H}]$ $\hat{\Pi}_\mu = \hat{p}_\mu - eA_\mu(\hat{x})$

$\frac{d\hat{\Pi}_\mu}{ds} = -i[\hat{\Pi}_\mu, \hat{H}]$

2. Подставить $\hat{\Pi}(\hat{x})$ в $\hat{H} = -\hat{\Pi}^2 + \frac{e}{2} F_{\mu\nu}(\hat{x})\sigma^{\mu\nu}$

3. $U = e^{-i\hat{H}s}$ $\quad i\partial_s U(s) = \hat{H} U(s)$

II. видим $\langle x | e^{-i\hat{H}s} | y \rangle$ — хочется перейти к функциональному интегралу

$=$ обратное пр-е Лежандра.

$$H = -(p_\mu - eA_\mu(x))^2 + \frac{e}{2} F_{\mu\nu}(x) \sigma^{\mu\nu}$$

$$\dot{x}_\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} = -2(p_\mu - eA_\mu(x)) \qquad (p_\mu - eA_\mu(x)) = -\frac{\dot{x}_\mu}{2}$$

$$\mathcal{L} = p_\mu \dot{x}_\mu - H(x_\mu, \dot{x}_\mu) = -\frac{\dot{x}_\mu^2}{2} + eA_\mu(x)\dot{x}_\mu + \frac{\dot{x}_\mu^2}{4} - \frac{e}{2} F_{\mu\nu}(x)\sigma^{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{\dot{x}_\mu^2}{4} + eA_\mu(x)\dot{x}_\mu - \frac{e}{2} F_{\mu\nu}(x)\sigma^{\mu\nu},$$

$$\rightarrow \quad -\dot{x}_\mu^2 = -\dot{x}_0^2 + \dot{x}_i^2 \qquad g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$$

$$\langle x', s | x'', 0 \rangle = \int\limits_{\substack{x(0) = x'' \\ x(s) = x'}} \mathcal{D}x(\tau)\, e^{iS[x(\tau)]}, \quad S = \int_0^s d\tau\, \mathcal{L}[x(\tau), \dot{x}(\tau)]$$

Классич. решения ур. Лагранжа $\Rightarrow S[x_{cl}]$

$$\langle x', s | x'', 0 \rangle \sim \frac{1}{\sqrt{\det \partial^2 S / \partial x' \partial x''}} e^{iS[x_{cl}]}$$

$F_{\mu\nu}$ - const.

$-\frac{1}{2}\dot{x}_\mu \delta \dot{x}_\mu + e A_\mu(x)\delta \dot{x}_\mu + e\,\partial_\nu A_\mu \dot{x}_\mu \delta x_\nu$ 3

$\frac{1}{2}\ddot{x}_\mu \delta x_\mu - e\,\partial_\nu A_\mu \dot{x}_\nu \delta x_\mu + e\,\partial_\mu A_\nu \dot{x}_\nu \delta x_\mu$

$\ddot{x}_\mu + 2e F_{\mu\nu}\dot{x}_\nu = 0$

$B_z \neq 0$
$F_{12} = B$

$\ddot{x}_2 + 2eB\dot{x}_1 = 0$

$\ddot{x}_1 - 2eB\dot{x}_2 = 0$

пропагаторы электрона

Фаза зависит от калибровки

$$\langle x', s | x'', 0\rangle = -\frac{i}{16\pi^2}\frac{1}{s^2}\exp\left(ie\int_{x''}^{x'} d\xi_\mu A^\mu(\xi)\right)\cdot$$

но диаграммы калибр. инвариантны.

$$\cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\ln\frac{\mathrm{sh}\, eFs}{eFs} + \frac{i}{4}(x'-x'')(eF\,\mathrm{cth}\, eFs)(x'-x'') + \frac{ie}{2}\sigma F s\right)$$

Эфф. Действие

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

раскрыли экспоненту производящую

интересуемся только физикой A, не ψ — ~~эфф~~ возьмем в одинаковых с отсутствием частиц ψ. (только поле A)
нужно взять по сост. 0 частиц к в присутствии A.

$$\langle A| eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi|A'\rangle_{\Omega_\psi} \to eA_\mu\langle\Omega|\bar{\psi}_{(x)}\gamma^\mu\psi_{(x)}|\Omega\rangle = eA_\mu\,\mathrm{Tr}\langle\Omega|G\gamma^\mu|\Omega\rangle$$

$$J^\mu_A = \mathrm{Tr}\langle\Omega|\hat{G}_A\gamma^\mu|\Omega\rangle = \mathrm{Tr}\langle x|\hat{G}\gamma^\mu|x\rangle$$

$$J^\mu_A = \mathrm{Tr}\left[\int_0^\infty ds\, e^{-ism^2}\langle x|\gamma^\mu(\hat{\cancel{p}} - e\cancel{A} + m)e^{-i\hat{H}s}|x\rangle\right]$$

0, т.к. odd number of γ

$$\hat{H} = -(\hat{p}_\mu - e\hat{A}_\mu(x))^2 - \frac{e}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$$

$$J^\mu_A = -\frac{i}{2e}\frac{\partial}{\partial A_\mu}\int_0^\infty\frac{ds}{s}e^{-ism^2}\,\mathrm{Tr}\left[\langle x|e^{-i\hat{H}s}|x\rangle\right]$$

$$S_{eff} = \int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + eA_\mu J^\mu_A\right]$$

по частям

$$S_{eff} = \int d^4x\left\{\overbrace{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{i}{2}\int_0^\infty\frac{ds}{s}e^{-ism^2}\,\mathrm{Tr}_x\left[\langle x|e^{-i\hat{H}s}|x\rangle\right]}^{\mathcal{L}_{eff}}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{eff}_{scalar} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2(x) - i\int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \langle x | e^{-i\hat{H}s} | x \rangle$$

Эфф. действие из интеграла по путям (скаляры)

$$\int DA_\mu\, e^{iS_{eff}[A]} = \int DA_\mu \int D\varphi^* \int D\varphi\, e^{i\int d^4x\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \varphi^*(D^2+m^2)\varphi\right)}$$

$$= \int DA_\mu\, e^{i\int d^4x\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2\right)} \frac{1}{\det(-D^2-m^2)} = \int DA_\mu\, e^{i\int d^4x\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2\right) - \ln\det(-D^2-m^2)}$$

$$D^2 = (\partial_\mu - ieA_\mu)^2$$

$$\ln\det(-D^2-m^2) = \mathrm{tr}\ln(-D^2-m^2) = \int d^4x \langle x | \ln(-D^2-m^2) | x \rangle$$

$$\frac{d}{dm^2}\langle x | \ln(-D^2-m^2) | x \rangle = -\langle x | \frac{1}{-D^2-m^2} | x \rangle =$$

$$= -i\int_0^\infty ds\, e^{-ism^2}\langle x | e^{-i\hat{H}s} | x \rangle \qquad \Big\| \int dm^2$$

$$\mathcal{L}_{eff}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - i\int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2}\langle x | e^{-i\hat{H}s} | x \rangle + const$$

фермионы: потенциально то же, дальше возиться с γ-матриц.

$$\int DA_\mu\, e^{iS_{eff}[A]} = \int DA_\mu \int D\bar{\psi} D\psi\, e^{i\int d^4x\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu + m)\psi\right)}$$