Решение ур-я Дирака в магнитном поле.

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi(x) = 0$$

Постоянное магнитное поле $\vec{B} \parallel z$

Калибровка: $A^\mu = (0, 0, xB, 0)$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = \hat{H}\psi(x), \qquad \hat{H} = \gamma_0[\vec{\gamma}(\hat{\vec{p}} + e\vec{A})] + m\gamma_0$$

$$\hat{\vec{p}} = -i\vec{\nabla}$$

$\psi(x)$ – собств. сост. гамильтониана (определена энергия)

$$\hat{H}\psi(x) = p_0\psi(x)$$

$$\psi(x) = e^{-ip_0 t}\psi(x,y,z)$$

Надо найти собственные функции $\psi(x)$

лин. ал. → Коммутирующие операторы обладают одинаковым набором собств. ф-ий

$$\hat{T}^0 = \frac{1}{m}[\vec{\Sigma}(\hat{\vec{p}} + e\vec{A})], \qquad \vec{\Sigma} = \gamma_0\vec{\gamma}\gamma_5 = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{T}^0 = \begin{pmatrix} \hat{\tau}^0 & 0 \\ 0 & \hat{\tau}^0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\tau}_0 = \frac{1}{m}[\vec{\sigma}(\hat{\vec{p}} + e\vec{A})]$$

$$[\hat{H}, \hat{T}^0] = 0 \Rightarrow \psi_T \text{ – собств. ф-ия } \hat{H}$$

$$\hat{\tau}^0 = \frac{1}{m}\left[\sigma_x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) + \sigma_y\left(-i\frac{\partial}{\partial y} + \beta x\right) + \sigma_z\left(-i\frac{\partial}{\partial z}\right)\right] \qquad \beta = eB$$

$\hat{T}^0$ не зависит явно от y и z ⇒

$$\psi_T(x,y,z) = e^{i(p_y y + p_z z)}\begin{pmatrix} F(x) \\ \varkappa F(x) \end{pmatrix}, \qquad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\tau^0 \psi_T = \frac{1}{m}\left[\sigma_z \cdot p_z + \sigma_y \cdot p_y + \sigma_x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) + \sigma_y \cdot \beta x\right] f(x)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\tau}^0 \psi_T = \frac{1}{m}\left[\begin{pmatrix} p_z & -ip_y \\ ip_y & -p_z \end{pmatrix} + \sigma_x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) + \sigma_y \cdot \beta x\right] F(x)$$

замена переменных: $\xi = \sqrt{\beta}\left(x + \frac{p_y}{\beta}\right)$ $\quad \hat{a}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi \mp \frac{d}{d\xi}\right)$

$$\frac{1}{m}\begin{pmatrix} p_z & -i\sqrt{2\beta}\,a^- \\ i\sqrt{2\beta}\,a^+ & -p_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{pmatrix} = T^0 \begin{pmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{pmatrix}$$

$$f_1(\xi) = \frac{-i\sqrt{2\beta}}{m_e T^0 - p_z}\, a^- f_2(\xi) \qquad \text{(1-я строчка)}$$

$$\left(a^+ a - \frac{m_e^2 (T^0)^2 - p_z^2}{2\beta}\right) f_2(\xi) = 0 \qquad \text{(2-я строчка)}$$

$$\left(\underbrace{\frac{d^2}{d\xi^2}}_{-p^2} \underbrace{- \xi^2}_{-x^2} + \underbrace{1 + \frac{m_e^2 (T^0)^2 - p_z^2}{\beta}}_{E_{осц}}\right) f_2(\xi) = 0$$

— гамильтониан гармонического осциллятора!

$$\frac{m_e^2 (T^0)^2 - p_z^2}{\beta} = 2n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Уравнение на T^0. $f_2(\xi)$ - собств. ф-я при значениях T^0, опред. из этого уравнения.

$$T^0 = \pm \frac{1}{m_e}\sqrt{p_z^2 + 2n\beta}$$

$$F_2(\xi) = C \cdot V_n(\xi)$$ собств. ф-я осциллятора (через полиномы Эрмита)

$$f_1(\xi) = C \cdot \frac{-i\sqrt{2n\beta}}{m_e \tau^0 - p_z} V_{n-1}(\xi)$$

$$F = \begin{pmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{pmatrix}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} F \\ \varkappa F \end{pmatrix}$$

$$\hat{H} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} (\vec{p} + e\vec{A})}_{m_e \hat{\tau}_0} + m_e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$m_e \begin{pmatrix} 1 & \hat{\tau}_0 \\ \hat{\tau}_0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(x) \\ \varkappa F(x) \end{pmatrix} = p_0 \begin{pmatrix} F(x) \\ \varkappa F(x) \end{pmatrix}$$

$$1 + \varkappa \tau_0 = p_0 / m_e$$

$$\tau_0 - \varkappa = \varkappa\, p_0 / m_e \quad \Rightarrow \quad p_0^2 = (\tau_0^2 + 1) m_e^2$$

$$p_0 = \pm E_n$$

$$E_n = m_e \sqrt{(\tau_0)^2 + 1} = \sqrt{p_z^2 + m_e^2 + 2n\beta}$$

$$\varkappa = \frac{\pm E_n - m_e}{m_e \tau_0}$$

$$\varkappa_{E+} = \pm \sqrt{\frac{E_n - m_e}{E_n + m_e}}$$

$$\varkappa_{E-} = \pm \sqrt{\frac{E_n + m_e}{E_n - m_e}}$$

Решение:

$$\psi^{(+\pm)}(x) = A^{(+\pm)} e^{-i(E_n t - p_y y - p_z z)}\, U^{(+\pm)}(\xi)$$

$$U^{(++)}(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{-i\sqrt{2n\beta}}{\sqrt{p_z^2 + 2n\beta} - p_z} V_{n-1}(\xi) \\ V_n(\xi) \\ \sqrt{\frac{E_n - m_e}{E_n + m_e}} \cdot \frac{-i\sqrt{2n\beta}}{\sqrt{p_z^2 + 2n\beta} - p_z} V_{n-1}(\xi) \\ \sqrt{\frac{E_n - m_e}{E_n + m_e}} \cdot V_n(\xi) \end{pmatrix}, \quad U^{(+-)}(\xi) = \begin{pmatrix} -''- \\ -''- \\ - \;\; -''- \\ - \;\; +''- \end{pmatrix}$$

$$\xi = \sqrt{\beta}\,(x + p_y/\beta)$$

Спиновые состояния с $E_n > 0$ — линейная комбинация внешнеплоскостных

$$U^{(+)}_{s=+1/2}(\xi) = \begin{pmatrix} (E_n + m_e) V_{n-1}(\xi) \\ 0 \\ p_z V_{n-1}(\xi) \\ i\sqrt{2n\beta}\, V_n(\xi) \end{pmatrix} \qquad U^{(+)}_{s=-1/2}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ (E_n + m_e) V_n(\xi) \\ -i\sqrt{2n\beta}\, V_{n-1}(\xi) \\ -p_z V_n(\xi) \end{pmatrix}$$

$$E_n = \sqrt{p_z^2 + m_e^2 + 2n\beta}$$

Отриц. частотные решения — позитроны

$$\xi^- = \sqrt{\beta}\,(x - p_y/\beta)$$

$$U^{(-)}_{s=+1/2}(\xi^-) = \begin{pmatrix} p_z V_{n-1}(\xi^-) \\ -i\sqrt{2n\beta}\, V_n(\xi^-) \\ (E_n + m_e) V_{n-1}(\xi^-) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U^{(-)}_{s=-1/2}(\xi^-) = \begin{pmatrix} i\sqrt{2n\beta}\, V_{n-1}(\xi^-) \\ -p_z V_n(\xi^-) \\ 0 \\ (E_n + m_e) V_n(\xi^-) \end{pmatrix}$$

Нулевой уровень Ландау $n = 0$

$E_n > 0$ нет $V_{-1}(\xi)$. Сущ. только решение для $s = -1/2$

$$U^{(+)}_{n=0, s=-1}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_n + m_e \\ 0 \\ -p_z \end{pmatrix} e^{-\xi^2/2}$$

$$E = E_0 = \sqrt{p_z^2 + m_e^2}$$

$$E_n = \sqrt{p_z^2 + m_e^2 + 2n\beta}$$

Когда можно учитывать только 0й уровень Ландау?

Когда $\beta \gg m_e^2$, $\beta \gg E$