Линейный отклик.

реальное время.

Квантовая система. $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$

$V(t) = 0, \quad t \le t_0$ $\qquad V(t)$ – мало (см. далее)

Свободная система, $\quad i\frac{d}{dt}|\psi_S(t)\rangle = \hat{H}_0|\psi_S(t)\rangle$

$$|\psi_S(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t}|\psi_S(0)\rangle \equiv |\psi_H\rangle$$

Представл. взаимодействия,

$$i\frac{d}{dt}|\psi_{int}(t)\rangle = \hat{H}(t)|\psi_{int}(t)\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{V}(t))|\psi_{int}(t)\rangle$$

$$|\psi_{int}(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t}\hat{U}(t,t_0)|\psi_S(0)\rangle \qquad t \le t_0 \mapsto \text{св. система.}$$

$$i\frac{d\hat{U}(t,t_0)}{dt} = \hat{V}_H(t)\hat{U}(t,t_0) \qquad U(t,t_0) = 1, \quad t \le t_0$$

$$\hat{V}_H(t) = e^{i\hat{H}_0(t)}\hat{V}(t)e^{-i\hat{H}_0(t)}$$

Чтобы проверить, продифф. $|\psi_{int}(t)\rangle$

$$\hat{U}(t,t_0) = 1 - \underbrace{i\int_{t_0}^{t}dt'\hat{V}_H(t')}_{\ll 1 \to \text{верно}} + \dots$$ – решение ур. на U при малых V,

$$|\psi_{int}(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t}|\psi_H\rangle - ie^{-i\hat{H}_0 t}\int_{t_0}^{t}dt'\,\hat{V}_H(t')|\psi_H\rangle$$

$$\langle\psi_{int}(t)| = \langle\psi_H|e^{i\hat{H}_0 t} + i\int_{t_0}^{t}dt'\langle\psi_H|\hat{V}_H(t')e^{i\hat{H}_0 t}$$

$$\langle\psi_{int}(t)|\hat{A}|\psi_{int}(t)\rangle = \langle\psi_H|e^{i\hat{H}_0 t}\hat{A}e^{-i\hat{H}_0 t}|\psi_H\rangle +$$

$$+ i\int_{t_0}^{t}dt'\langle\psi_H|\hat{V}_H(t')e^{i\hat{H}_0 t}\hat{A}e^{-i\hat{H}_0 t} - e^{i\hat{H}_0 t}\hat{A}e^{-i\hat{H}_0 t}\hat{V}_H(t')|\psi_H\rangle$$

+ след. пор. малости

$$// \; e^{i\hat{H}_0 t}\hat{A}e^{-i\hat{H}_0 t} = \hat{A}_H \; //$$

$$\langle \Psi_{int}(t) | \hat{A} | \Psi_{int}(t) \rangle = \langle \Psi_H | \hat{A}_H(t) | \Psi_H \rangle + i \int_{t_0}^{t} dt' \langle \Psi_H | [\hat{V}_H(t'), \hat{A}_H(t)] | \Psi_H \rangle$$

пример — среднее по основному состоянию осциллятора ($\hat{A} = \hat{x}^2$)

$V(t) = \theta(t - t_0) \cdot \alpha x^4$

слева — среднее по измененному осн. состоянию в потенциале с возмущением

$$\boxed{\langle \hat{A} \rangle_{int} - \langle \hat{A} \rangle_0 = i \int_{t_0}^{t} dt' \langle \Psi_H | [\hat{V}_H(t'), \hat{A}_H(t)] | \Psi_H \rangle}$$

$= \delta \langle \hat{A} \rangle$

формула Кубо $\quad i \int_{t_0}^{t} dt' \langle [V(t'), \hat{A}(t)] \rangle_0$

Аналогично — если среднее по тепловой фазе $\quad \langle A \rangle_0 = \frac{1}{Z} Tr \{ \rho \hat{A} \}$

$\boxed{\hat{\rho} = e^{-\beta \hat{H}_0}}$

$$\boxed{\langle \hat{A} \rangle_{int} - \langle \hat{A} \rangle_0 = \frac{1}{Z} i \int_{t_0}^{t} dt' \, Tr \{ \hat{\rho} [\hat{V}_H(t'), \hat{A}(t)] \}}$$

$\boxed{Z = Tr\, e^{-\beta \hat{H}_0}}$

$V(t) = \int d^3x \, J(x,t) \hat{\varphi}(x,t)$

$\hat{A}(t) = \hat{\varphi}(x,t)$

$$\delta \langle \hat{\varphi}(x,t) \rangle = -i \int_{t_0}^{t} dt' \int d^3x' \, J(x',t') \frac{1}{Z} Tr \{ \hat{\rho} [\hat{\varphi}(x,t), \hat{\varphi}(x',t')] \}$$

retarded

$$i D^R(x,t,x',t') = \frac{1}{Z} Tr \{ \hat{\rho} [\hat{\varphi}(x,t), \hat{\varphi}(x',t')] \} \theta(t - t')$$

advanced

$$i D^A(x,t,x',t') = -\frac{1}{Z} Tr \{ \hat{\rho} [\hat{\varphi}(x,t), \hat{\varphi}(x',t')] \} \theta(t' - t)$$

$$\delta \langle \hat{\varphi}(x,t) \rangle = \int_{-\infty\,(t_0)}^{+\infty} dt' \int d^3x' \, J(x',t') D^R(x,t,x',t')$$

t_0 унесли на $-\infty$

в фурье-представлении,

$$\delta \langle \varphi(\omega,k) \rangle = J(\omega,k) D^R(\omega,k)$$

// real time все

Связь real-time и мацубар. пропагаторов.

$$iD^+(x,y) = \langle \hat\varphi(x)\hat\varphi(y)\rangle = \frac{1}{Z}\sum_n e^{-\beta E_n}\langle n|\hat\varphi(x)\hat\varphi(y)|n\rangle =$$

$$= \frac{1}{Z}\sum_{m,n} e^{-\beta E_n}\langle n|\hat\varphi(x)|m\rangle\langle m|\hat\varphi(y)|n\rangle =$$

$$= \frac{1}{Z}\sum_{m,n} e^{-\beta E_n} e^{i(p_n-p_m)(x-y)}\langle n|\hat\varphi(0)|m\rangle\langle m|\hat\varphi(0)|n\rangle$$

Spectral density: $\rho^+(k) = \frac{1}{Z}\sum_{m,n} e^{-\beta E_n}(2\pi)^3\delta^{(4)}(k-p_m+p_n)|\langle n|\hat\varphi(0)|m\rangle|^2$

$$D^+(k) = \int d^4z\, e^{ikz} D^+(z)$$

$$iD^+(k) = 2\pi\rho^+(k)$$

аналогично: $iD^-(x,y) = -\langle\hat\varphi(y)\hat\varphi(x)\rangle$

$$iD^-(k) = 2\pi\rho^-(k)$$

$$\rho^-(k) = -\frac{1}{Z}\sum_{m,n} e^{-\beta E_n}(2\pi)^3\delta^{(4)}(k+p_m-p_n)|\langle n|\hat\varphi(0)|m\rangle|^2$$

Хотим привести к $\rho^+(k)$

меняем местами m и n чтобы

δ-функции точно так же

$$\sum_{m,n} e^{-\beta E_m}\delta^{(0)}(k^0-\underbrace{p_m^0}_{E_m}+\underbrace{p_n^0}_{E_n}) = \sum_{m,n} e^{-\beta E_n-\beta k^0}$$

$$\rho^-(k) = -e^{-\beta k_0}\rho^+(k)$$

Симметричные ф-я Грин.

$$D^n(x-y) = -i\langle[\hat\varphi(x),\hat\varphi(y)]\rangle = D^+ + D^-$$

$$\rho^n(k) = \frac{1}{Z}\sum_{m,n}\left(e^{-\beta E_n}-e^{-\beta E_m}\right)(2\pi)^3\delta^{(4)}(k-p_m+p_n)|\langle n|\hat\varphi(0)|m\rangle|$$

retarded $D^R(z) = \theta(z_0)D^n(z)$ — запаздывающий

advanced $D^A(z) = -\theta(z_0)D^n(z)$ — опережающий

$$D^R(k) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega - k_0 + i\varepsilon}\, \rho^n(\omega, \vec{k})$$

$$D^A(k) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega - k_0 + i\varepsilon}\, \rho^n(\omega, k)$$

$$\operatorname{Im} D^R(k) = -\operatorname{Im} D^A(k) = -\pi \rho^n(k) \quad \Big\| \quad D^R(k) = \int_0^{\infty} dt_0 \int d^3t\, e^{-ikt} D^{n}$$

$$\operatorname{Re} D^R(k) = \operatorname{Re} D^A(k)$$

Термальные пропагаторы

$$D(x,\tau) = \langle \hat{\varphi}(x,\tau), \hat{\varphi}(0) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | \hat{\varphi}(x,\tau)\, \hat{\varphi}(0) | n \rangle$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{m,n} e^{-\beta E_n} \langle n | \hat{\varphi}(x,\tau) | m \rangle \langle m | \hat{\varphi}(0) | n \rangle =$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{m,n} e^{-\beta E_n} e^{\tau(E_n - E_m)} e^{i(p_m - p_n)x} \left| \langle n | \hat{\varphi}(0) | m \rangle \right|^2$$

$$D(\omega_n, k) = \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x\, e^{-i(kx + \omega_n \tau)} D(x,\tau) =$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{m,n} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{p}_m + \vec{p}_n) \left| \langle n | \hat{\varphi}(0) | m \rangle \right|^2 \times \frac{e^{-\beta E_m} - e^{-\beta E_n}}{E_n - E_m - i\omega_n}$$

по сравнению с $\rho^n(k)$ нет $\delta^{(0)}$-функции

есть $\dfrac{1}{E_n - E_m - i\omega_n}$

$$D(\omega_n, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega + i\omega_n}\, \rho^n(\omega, \vec{k}).$$

$$D^R(k) = -D(\omega_n \to ik_0 - \varepsilon)$$

$$D^A(k) = -D(\omega_n \to ik_0 + \varepsilon)$$