

КТТ III. Векторные поля

Содержание

Безмассовое векторное поле	2
Лагранжиан и уравнения движения	2
Решение уравнений	5
Ковариантизация	8
Динамические инварианты	12
Массивное векторное поле	14

Безмассовое векторное поле

- Рассмотрим действительное векторное поле и напомним наиболее общий вид квадратичного (псевдо)скалярного лагранжиана

$$\mathcal{L} = a\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + b\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + \frac{m^2}{2}(A_\mu)^2 + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \partial^\mu A^\nu \partial^\rho A^\lambda \quad (1)$$

NB: Не выписаны слагаемые, представляющие собой полные производные, либо эквивалентные с точностью до полных производных выписанным слагаемым.

NB: Последнее слагаемое также представляет собой полную производную (доказать!) и может быть отброшено.

- Потребуем, чтобы теория (лагранжиан) была инвариантна относительно калибровочных или градиентных преобразований

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(x), \quad \alpha \text{ -- произвольная функция} \quad (2)$$

- Тогда $a = -b$ и $m^2 = 0$
- Введем тензор напряженности

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3)$$

и выберем $a = -1/2$. Знак a диктуется $E > -\infty$ (проверить!).

- Тогда из (1) получим действие безмассового векторного поля (электромагнитного поля)

$$S = -\frac{1}{4} \int dx F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4)$$

- Уравнения движения (вариация по A^ν)

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \partial^2 A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = 0. \quad (5)$$

соответствуют первой паре уравнений Максвелла (УМ)

- Вторая пара УМ \Leftrightarrow тождества Бьянки

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \partial^\nu F^{\lambda\rho} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (6)$$

- Преобразование Фурье \Leftrightarrow переход в импульсное пространство

$$A_{\mu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{ikx} A_{\mu}(k) \Rightarrow \quad (7)$$

- Уравнения Максвелла в импульсном пространстве

$$k^2 A_{\nu}(k) - k_{\nu}(kA(k)) = 0. \quad (8)$$

- Чтобы их решить воспользуемся известной теоремой

● Теорема Гельмгольца:

$$A_\mu = \partial_\mu b(x) + A_\mu^\perp = A_\mu^\parallel + A_\mu^\perp, \quad \partial^\mu A_\mu^\perp = 0 \quad (9)$$

● В импульсном пространстве

$$A_\mu^\parallel(k) = k_\mu b(k), \quad k^\mu \tilde{A}_\mu^\perp = 0, \quad A_\mu^\parallel \tilde{A}^{\mu\perp} = 0 \quad (10)$$

$\tilde{A}_\mu^\perp(k)$ -- Фурье-образ для $A_\mu^\perp(x)$

NB: Отсюда обозначения и названия

● A_μ^\parallel -- продольное (вдоль импульса k_μ) поле

● A_μ^\perp -- поперечное (ортогональное 4-х импульсу) поле

NB:

$$\partial^\mu A_\mu(x) = \partial^\mu A_\mu^\parallel = \partial^2 b(x) \Leftrightarrow kA = kA^\parallel = k^2 b(k) \quad (11)$$

● Два случая:

● $k^2 \neq 0 \Rightarrow$ УМ

$$k^2(b - b) + k^2\tilde{A}_\mu^\perp = k^2\tilde{A}_\mu^\perp = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} b(k) \text{ -- произвольная} \\ \tilde{A}_\mu^\perp = 0 \end{array} \quad (12)$$

● $k^2 = 0 \Rightarrow b(k)$ и \tilde{A}_μ^\perp -- произвольные

● Объединяем два случая

$$A_\mu(k) = k_\mu b(k) + \tilde{A}_\mu^\perp(k) = k_\mu b(k) + \delta(k^2)A_\mu^\perp(k) \quad (13)$$

● $k_\mu b = A_\mu^\parallel(k)$ -- ничем не фиксируется -- чистая калибровка

$$\alpha(x) \sim -i \int dk e^{ikx} b(k) \quad (14)$$

$$A_\mu^\parallel(x) = \partial_\mu \alpha \sim \int dk k_\mu e^{ikx} b(k) \quad (15)$$

NB: Так должно быть!, т.к. есть калибровочная свобода: к любому решению можно добавить $\partial_\mu \alpha$ и получить новое решение.

- Степени свободы -- сколько функций надо задать, чтобы фиксировать вектор A_μ^\perp ? \Rightarrow разложим по базису:

$$k^\mu A_\mu^\perp = 0 \Rightarrow \quad (16)$$

Существует 3 вектора, ортогональных в 4-х мерном смысле к A_μ^\perp :

- k^μ : $k_\mu k^\mu = 0$ -- вклад от него мы уже учли в продольной части
- Два других можно выбрать чисто пространственными и ортогональными в 3-х мерном смысле к \vec{k} и друг к другу:

$$e_0^{(\alpha)} = 0; \quad e_i^{(\alpha)} k_i = 0; \quad e_i^{(\alpha)} e_i^{(\beta)} = \delta^{\alpha\beta}; \quad \alpha = 1, 2 \quad (17)$$

$$(e_\mu^{(\alpha)})^* \neq e_\mu^{(\alpha)} \quad \text{-- в общем случае} \quad (18)$$

- Окончательно

$$A_\mu(k) = k_\mu b(k) + e_\mu^{(\alpha)}(k) a_\alpha(k) \delta(k^2) \quad (19)$$

-- содержит 1 калибровочную функцию $b(k)$ и 2 физические степени свободы $a_\alpha(k)$ -- 2 поляризации, имеющие закон дисперсии $k_0 = |\vec{k}|$ и распространяющиеся со скоростью света.

● Для дальнейшего удобно распространить суммирование по $\alpha = 0, 1, 2, 3$.
Нужно фиксировать или выбрать калибровку.

● Способы выбора калибровки

● $A_0 = 0$ -- гамильтонова или темпоральная калибровка. Удобна при построении гамильтонова формализма. Остаточные калибровочные преобразования (ОКП):

$$0 = A_0 = A'_0 = 0 + \partial_0 \alpha(x) \Rightarrow \alpha(x) = \alpha(\vec{x}) \quad (20)$$

● $A_3 = 0$ -- аксиальная калибровка. Удобна при решении аксиально-симметричных задач. ОКП:

$$0 = A_3 = A'_3 = 0 + \partial_3 \alpha(x) \Rightarrow \alpha(x) = \alpha(t, x^1, x^2) \quad (21)$$

● $\partial_i A_i = \text{div} \vec{A} = 0$ -- калибровка Кулона. Удобна при решении задач статики. ОКП:

$$0 = \partial_i A'_i = \partial_i A_i + \partial_i^2 \alpha(x) \Rightarrow \Delta \alpha(x) = 0 \quad (\alpha(\infty) < \infty) \Rightarrow \alpha = \alpha(t) \quad (22)$$

● $\partial^\mu A_\mu = 0$ -- калибровка Лоренца (КЛ). Лоренц-инвариантна!. ОКПТ:

$$0 = \partial_\mu A'_\mu = \partial_\mu A_\mu + \partial_\mu^2 \alpha(x) \Rightarrow \partial^2 \alpha(x) = 0 \Rightarrow \quad (23)$$

α -- решение безмассового уравнения Клейна-Гордона

● В импульсном пространстве КЛ

$$k^\mu A_\mu = 0 \Rightarrow A_\mu = \delta(k^2) \left(k_\mu b'(k) + a_\alpha e_\mu^{(\alpha)} \right) \quad (24)$$

● Введем локальный репер или тетраду

$$e_\mu^\alpha = \begin{cases} e_\mu^{(\alpha)} & \alpha = 1, 2 \\ e_\mu^3 = \left(0, -\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \right) & \alpha = 3 \\ e_\mu^0 = \delta_{\mu 0} = (1, \vec{0}) & \alpha = 0. \end{cases} \quad (25)$$

● Свойство

$$e_\mu^\alpha e^{\beta\mu} = g^{\alpha\beta}. \quad (26)_9$$

- Взаимная тетрада

$$e_{\mu}^{\alpha} e_{\beta}^{\mu} = \delta_{\beta}^{\alpha} \stackrel{?}{\Rightarrow} \quad (27)$$

$$e_{\nu}^{\alpha} e_{\alpha}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} . \quad (28)$$

Кроме того, имеем (?) правила поднимания и опускания тетрадных индексов

$$e_{\mu}^{\alpha} = g^{\alpha\beta} e_{\beta\mu} , \quad e_{\alpha\mu} = g_{\alpha\beta} e_{\mu}^{\beta} . \quad (29)$$

NB: С индексами типа " α " (тетрадными индексами) и типа " μ " (лоренцевыми индексами) теперь можно работать на равных. Далее их не будем различать.

- Окончательно

$$A_{\mu}(k) = \delta(k^2) a_{\nu}(k) e_{\mu}^{\nu}(k) \quad (30)$$

Подставляем в интеграл Фурье и интегрируем по k^0 . Итог

$$A_\mu(x) = A_\mu^+(x) + A_\mu^-(x) , \quad (31)$$

$$A_\mu^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} a_\alpha^\pm(\mathbf{k}) e_\mu^\alpha(k) e^{\pm i\mathbf{k}x} \Big|_{k^0=|\mathbf{k}|} \quad (32)$$

NB: Сравните

$$\varphi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}} a^\pm(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{1} \cdot e^{\pm i\mathbf{k}x} \Big|_{k^0=+\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} . \quad (33)$$

● Вектор импульса

$$P_\mu = - \int d\mathbf{k} k_\mu a_\nu^+(\mathbf{k}) a^{\nu-}(\mathbf{k}) . \quad (34)$$

● (Наивно) энергия не ограничена снизу!:

$$a_i(\mathbf{k}) = 0 \Rightarrow P^0 = E = - \int d\mathbf{k} k^0 a_0^+ a_0^- < 0 \text{ с учетом } (a_\mu^+)^* = a_\mu^- \quad (35)$$

● Но есть условие Лоренца

$$0 = k^\mu a_\nu^\pm e_\mu^\nu = k^0 a_0^\pm - \frac{\vec{k}^2}{|\vec{k}|} a_3^\pm \Big|_{k^0=|\mathbf{k}|} \Rightarrow a_0^\pm = a_3^\pm, \quad (36)$$

т.е., если $a_0 \neq 0$, то и $a_3 \neq 0$. Более того, вклады от временных (a_0) фотонов в вектор импульса в точности сокращается вкладом от продольных (a_3) фотонов. В итоге

$$P_\mu = - \int d\mathbf{k} k_\mu a_\nu^+(\mathbf{k}) a^{\nu-}(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{k} k_\mu a_\alpha^+(\mathbf{k}) a_\alpha^-(\mathbf{k}) \Big|_{\alpha=1,2} . \quad (37)$$

- Проекция спина на направление движения также зависит только от физических степеней свободы и (при подходящим выборе e_{μ}^{α}) соответствует ± 1 .

Массивное векторное поле

- Наиболее общий вид лагранжиана (с точностью до полных производных)

$$\mathcal{L} = a \partial^\mu B_\nu \partial_\mu B^\nu + b \partial^\mu B_\nu \partial^\nu B_\mu + \frac{m^2 B_\mu^2}{2} \quad (38)$$

NB: Если $m^2 \neq 0$, то нет калибровочной инвариантности

- Теорема Гельмгольца

$$B_\mu = \partial_\mu \pi + B_\mu^\perp \quad (39)$$

- Поле π -- динамическое скалярное поле (не калибровочная функция!). Если $a \neq -b$, то лагранжиан будет содержать старшие производные этого поля, что приведет к патологиям (отрицательная энергия и т.п.) Проверить!

- Поэтому $a = -b = -1/2, m^2 > 0$
- Введем напряженность

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (40)$$

Тогда лагранжиан принимает вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (B_{\mu\nu}^\perp)^2 + \frac{m^2}{2} (B_\mu^\perp)^2 + \frac{m^2}{2} (\partial\pi)^2 \quad (41)$$

NB: Лагранжиан поля π отщепляется и является лагранжианом свободного безмассового скалярного поля, которое мы уже изучали, и в данном контексте оно не представляет интереса. Хотелось бы от него избавиться.

- Уравнения движения для поля B_μ^\perp :

$$\partial^\mu B_{\mu\nu}^\perp + m^2 B_\nu^\perp = 0 \quad (42)$$

- Вычислим дивергенцию

$$\partial^\nu \partial^\mu B_{\mu\nu}^\perp + m^2 \partial^\nu B_\nu^\perp = m^2 \partial^\nu B_\nu^\perp = 0 \quad (43)$$

NB: Первое слагаемое тождественно обратилось в 0 из-за свертки симметричного $\partial^\mu \partial^\nu$ и антисимметричного $B_{\mu\nu}$ тензоров.

NB: Второе слагаемое тождественно обратилось в 0 в силу $\perp B_\mu^\perp$

- Но если мы сделаем в уравнениях замену $B_\mu^\perp \rightarrow B_\mu$

$$\partial^\mu B_{\mu\nu} + m^2 B_\nu = 0 \quad (44)$$

и вычислим дивергенцию, то получим условие непротиворечивости уравнений

$$\partial^\mu B_\mu = 0, \quad (45)$$

то есть условие поперечности.

- Поэтому последовательно выбрать лагранжиан поля B_μ (нет разложения на поперечную и продольную части!) в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu}^2 + \frac{m^2}{2} B_\mu^2 \quad (46)$$

- Этот лагранжиан приводит к уравнениям (44), (45), гарантирующим поперечность B_μ , т.е. отсутствие π
- Подставим (45) в (44) и получим

$$\partial^2 B_\nu - \partial_\nu \partial B + m^2 B_\nu = \partial^2 B_\nu + m^2 B_\nu = 0, \quad (47)$$

т.е. окончательно систему уравнений Ф́ока-Прокá

$$\begin{cases} \partial^2 B_\nu + m^2 B_\nu = 0 \\ \partial B = 0. \end{cases} \quad (48)$$

NB: Первое уравнение представляет собой 4 уравнения Клейна-Гордона для каждой компоненты $B_\mu \Rightarrow B_\mu$ будет (после квантования) описывать частицу с массой m и 3-мя степенями свободы (благодаря условию поперечности), соответствующими 3 возможным проекциям спина на направление движения $0, \pm 1$.