М.В. Либанов

КТП II. Гармонический осциллятор и скалярное поле

Содержание

Гармонический осциллятор 2
Гамильтонов формализм 5
Каноническое квантование 9
Представление чисел заполнения 12
Обсуждение 16
Общий подход к решению уравнений свободных полей 18
Рецепт решения 21
О выборе базиса: четырёхимпульс и спиральность 27
О выборе базиса: энергия и момент 35
Скалярное поле 37
Поле как механическая система 43
Каноническое квантование в ТП 46
Заключение 48

Одномерная теория поля $\Leftrightarrow$ гармонический осциллятор

- Рассмотрим поле $\varphi(t)$ в $1+0$ пространстве

$$\mathscr{L} = a\dot{\varphi}^2 + b\dot{\varphi} + c\varphi\dot{\varphi} + d\varphi^2 + e\varphi + f, \tag{1}$$

где $a, \ldots, f$ -- константы. Последние три слагаемые в (1) при $d \neq 0$ можно сгруппировать

$$d\left(\varphi + \frac{e}{2d}\right)^2 + f - \frac{e^2}{4d}. \tag{2}$$

Переопределяя поле

$$\varphi + \frac{e}{2d} \to \varphi, \tag{3}$$

приходим к наиболее общему виду лагранжиана такой теории

$$\mathscr{L} = a\dot{\varphi}^2 + d\varphi^2. \tag{4}$$

- Тензор энергии-импульса

$$E = T^{00} = E = a\dot{\varphi}^2 - d\varphi^2. \tag{5}$$

$$E > -\infty \Rightarrow a > 0, d \leq 0 \tag{6}$$

- При $d \neq 0$ решение уравнений движения (см. ниже) имеет вид

$$\varphi = c^{+} \exp\left(\sqrt{\frac{d}{a}}t\right) + c^{-} \exp\left(-\sqrt{\frac{d}{a}}t\right), \tag{7}$$

где $c^{\pm}$ произвольные амплитуды (константы интегрирования) $\Rightarrow$

$$E = -4d \cdot c^{+}c^{-}. \tag{8}$$

  - $d > 0 \Rightarrow c^{\pm}$ -- произвольные $\Rightarrow E < -\infty$
  - $d < 0 \Rightarrow c^{+} = (c^{-})^{*} \Rightarrow c^{+}c^{-} > 0$ -- Ok!

- Общая константа перед $\mathscr{L}$ не влияет на УД $\Rightarrow$ Каноническая нормировка

$$a = \frac{1}{2}, \quad d = -\frac{\omega^2}{2}. \tag{9}$$

Тогда лагранжиан примет вид

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{\omega^2}{2}\varphi^2. \tag{10}$$

- Уравнение движения

$$\delta S = S[\varphi + \delta\varphi] - S[\varphi] = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt(\dot{\varphi} \cdot \partial_t(\delta\varphi) - \omega^2\varphi\delta\varphi + \mathscr{O}((\delta\varphi)^2)). \tag{11}$$

$$\delta S = \dot{\varphi}\delta\varphi\Big|_{t_1}^{t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2} dt(\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi)\delta\varphi + \mathscr{O}(\delta\varphi)^2. \tag{12}$$

Граничный (поверхностный) член исчезает в силу $\delta\varphi(t_1) = \delta\varphi(t_2) \equiv 0$ (начальные/граничные условия фиксированы) $\Rightarrow$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0. \tag{13}$$

- Общее решение уравнения (13) имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(a^+ \mathrm{e}^{i\omega t} + a^- \mathrm{e}^{-i\omega t}\right). \tag{14}$$

Условие действительности поля φ приводит к требованию

$$(a^+)^* = a^-. \tag{15}$$

Гамильтонов формализм

- $q(t) \equiv \varphi(t)$ -- обобщенная координата
- Канонически сопряженный импульс

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{q}, \tag{16}$$

- Гамильтониан

$$H = p\dot{q} - \mathcal{L} = \frac{p^2 + \omega^2 q^2}{2}, \tag{17}$$

- Уравнения Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega^2 q \tag{18}$$

- M степеней свободы $H = \sum_{a=1}^{M} p_a \dot{q}_a - \mathscr{L}$

$$\dot{q}_a = \{H, q_a\}, \quad \dot{p}_a = \{H, p_a\}, \quad a, b \ldots = 1, \ldots, M, \tag{19}$$

и в общем случае для произвольной функции от координаты и импульса

$$\frac{dA(p,q)}{dt} = \{H, A\}, \tag{20}$$

где фигурными скобками обозначены скобки Пуассона, определенные как

$$\{A, B\} = \sum_{a=1}^{M} \frac{\partial A}{\partial p_a}\frac{\partial B}{\partial q_a} - \frac{\partial A}{\partial q_a}\frac{\partial B}{\partial p_a}. \tag{21}$$

- В частности, скобки Пуассона координат и импульсов имеют вид

$$\{p_a, q_b\} = \delta_{ab}, \quad \{p_a, p_b\} = \{q_a, q_b\} = 0. \tag{22}$$

- Снова осциллятор

$$p = i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(a^+ \mathrm{e}^{i\omega t} - a^- \mathrm{e}^{-i\omega t}\right) \tag{23}$$

гамильтониан

$$H = \frac{\omega}{2}\left(a^+ a^- + a^- a^+\right), \tag{24}$$

$$a^\pm = \frac{\mathrm{e}^{\mp i\omega t}}{\sqrt{2\omega}}\left(\omega q \mp ip\right) \tag{25}$$

скобки Пуассона между амплитудами

$$\{a^-, a^+\} = i, \quad \{a^-, a^-\} = \{a^+, a^+\} = 0. \tag{26}$$

- M степеней свободы

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_a K_{ab} \dot{\varphi}_b - \frac{1}{2}\varphi_a \Omega_{ab} \varphi_b, \tag{27}$$

- $E > -\infty \Rightarrow K_{ab} > 0$ и $\Omega_{ab} \geq 0 \Rightarrow$ диагонализация

$$K_{ab} = \delta_{ab} \quad \Omega_{ab} = \mathrm{diag}(\omega_a) \Rightarrow \tag{28}$$

-

$$\mathscr{L} = \sum_{a=1}^{M} \mathscr{L}_a = \sum_{a=1}^{M} \left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}_a^2 - \frac{\omega_a^2}{2}\varphi_a^2 \right). \tag{29}$$

-

$$\{a_a^-, a_b^+\} = i\delta_{ab}. \tag{30}$$

Каноническое квантование

- $p \mapsto \hat{p}$, $q \mapsto \hat{q}$
- действуют на независящий от t вектор $|\psi\rangle$
- $A(p,q) \mapsto \hat{A}(\hat{p},\hat{q})$ -- оператор
- Замена скобок Пуассона коммутатором

$$\{A,B\} \mapsto \frac{i}{\hbar}[\hat{A},\hat{B}] = \frac{i}{\hbar}(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) \ , \qquad (31)$$

NB: Согласованно с

- линейностью $\{\alpha A + \beta B, C\} = \alpha\{A,C\} + \beta\{B,C\}$
- антисимметричностью $\{A,B\} = -\{B,A\}$
- Тождеством Якоби

$$\{A,\{B,C\}\} + \{C,\{A,B\}\} + \{B,\{C,A\}\} \equiv 0 \qquad (32)$$

- эрмитовым сопряжением:

$$(\{A,B\})^* = \{A^*,B^*\} \mapsto (i[\hat{A},\hat{B}])^\dagger = -i([\hat{A},\hat{B}])^\dagger = -i[\hat{B}^\dagger,\hat{A}^\dagger] = i[\hat{A}^\dagger,\hat{B}^\dagger] \quad (33)$$

- Коммутатор канонических переменных

$$[\hat{p}, \hat{q}] = -i\ , \ \ [\hat{p}, \hat{p}] = [\hat{q}, \hat{q}] = 0\ , \tag{34}$$

- Уравнение Гамильтона становится уравнением Гейзенберга

$$i\frac{d\hat{A}(\hat{p}, \hat{q})}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}]\ . \tag{35}$$

- Наблюдаемая

$$A(t) = \langle\psi|\hat{A}(t)|\psi\rangle\ . \tag{36}$$

- Формальное решение (35)

$$\hat{A}(t) = \mathrm{e}^{i\hat{H}t}\hat{A}(0)\mathrm{e}^{-i\hat{H}t} \tag{37}$$

- Тогда

$$A(t) = \langle\psi|\mathrm{e}^{i\hat{H}t}\hat{A}(0)\mathrm{e}^{-i\hat{H}t}|\psi\rangle \equiv \langle\psi(t)|\hat{A}(0)|\psi(t)\rangle\ , \tag{38}$$

где по определению

$$|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-i\hat{H}t}|\psi(0)\rangle\ \Rightarrow \tag{39}$$

- Шредингеровская картина

$$i\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi(t)\rangle \ . \qquad (40)$$

- Введем λ - полный набор наблюдаемых $\Rightarrow$

$$\psi_\lambda(t) = \langle\lambda|\psi(t)\rangle \text{--волновая функция в представлении } \lambda \Rightarrow \qquad (41)$$

- Уравнение Шредингера в представлении λ

$$i\frac{\partial\psi_\lambda(t)}{\partial t} = \hat{H}_\lambda\,\psi_\lambda(t) \ , \qquad (42)$$

Представление чисел заполнения $\Leftrightarrow$ фоковсое представление в КТП

- Квантовый осциллятор

$$[\hat{a}^-, \hat{a}^+] = 1, \tag{43}$$

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^+ \hat{a}^- + \frac{\omega}{2} \tag{44}$$

- Собственные состояния гамильтониана $\Leftrightarrow$ состояния с определенной энергией

$$\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle. \tag{45}$$

- Заметим

$$\hat{H}\hat{a}^-|E\rangle = (E-\omega)\hat{a}^-|E\rangle \Rightarrow \hat{a}^-|E\rangle = \#|E-\omega\rangle \tag{46}$$

$$\hat{a}^+|E\rangle = \#|E+\omega\rangle \Rightarrow \tag{47}$$

- Значит

$$\exists|0\rangle : \tag{48}$$

$$\hat{a}^{-}|0\rangle = 0, \tag{49}$$

$$\langle 0|\hat{a}^{+} = 0, \tag{50}$$

$$\langle 0|0\rangle = 1, \tag{51}$$

- Векторы

$$|n\rangle = \left|\frac{\omega(2n+1)}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^{+})^{n}|0\rangle \tag{52}$$

являются ортонормированными,

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn}, \tag{53}$$

собственными векторами оператора Гамильтона с собственными значениями $\omega(n+1/2)$

$$\hat{H}|n\rangle = \omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle. \tag{54}$$

- Эти состояния также являются собственными векторами оператора *чисел заполнения* $\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}^-$, (очевидно) коммутирующего с гамильтонианом,

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \tag{55}$$

$\hat{N}$ -- аналог оператора числа частиц в КТП

- M степеней свободы: после диагонализации

$$\hat{N} = \sum_{a=1}^{M} \hat{N}_a = \sum_{a=1}^{M} \hat{a}_a^+ \hat{a}_a^-, \tag{56}$$

$$\hat{H} = \sum_{a=1}^{M} \hat{H}_a = \sum_{a=1}^{M} \omega_a \left(\hat{a}_a^+ \hat{a}_a^- + \frac{1}{2} \right) = \sum_{a=1}^{M} \omega_a \left(\hat{N}_a + \frac{1}{2} \right), \tag{57}$$

где повышающие и понижающие операторы имеют следующие коммутационные соотношения

$$[\hat{a}_a^-, \hat{a}_b^+] = \delta_{ab}, \quad [\hat{a}_a^+, \hat{a}_b^+] = [\hat{a}_a^-, \hat{a}_b^-] = 0. \tag{58}$$

- Нормированный вектор, описывающий состояние, в котором a-ая степень свободы (мода) имеет число заполнения n_a, с полной энергией

$$E = \sum_{a=1}^{M} \omega_a \left(n_a + \frac{1}{2} \right), \tag{59}$$

имеет вид

$$|n_1, n_2, \ldots, n_M\rangle = \prod_{a=1}^{M} \otimes |n_a\rangle = \prod_{a=1}^{M} \frac{1}{\sqrt{n_a!}} (\hat{a}_a^+)^{n_a} |0\rangle. \tag{60}$$

Обсуждение

NB: Для некоторых систем (фермионы) последовательно заменять скобки Пуассона на антикоммутаторы

$$\{A, B\} \mapsto \frac{i}{\hbar}\{\hat{A}, \hat{B}\} = \frac{i}{\hbar}(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}) \ . \qquad (61)$$

NB: Еще более последовательно для таких систем считать, что "классические" (не операторы!) обобщенные координаты и импульсы антикоммутируют, например, $p_a q_b = -q_b p_a, q_a q_b = -q_b q_a$. Такие величины называются *грассмановами*.

NB: В теории поля векторы состояний характеризуются непрерывными параметрами -- импульсами. В случае нескольких частиц не принято писать нормировочный фактор $1/\sqrt{N!}$ в векторе состояния, если импульсы двух и более тождественных частиц (бозонов) совпадают (так как такие состояния представляют собой множество меры нуль и их практически невозможно изготовить):

$$|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots\rangle = \prod_i \hat{a}^+_{\mathbf{k_i}}|0\rangle. \tag{62}$$

Однако этот фактор необходимо учитывать при вычислении интегральных величин.

Общий подход к решению уравнений свободных полей

- Лагранжиан свободных полей является квадратичной функцией полей и их первых производных $\Rightarrow$ Уравнения движения **свободных полей** являются линейными
$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{a;\mu}} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_a(x)} = \mathscr{D}_a^b(x)u_b(x) = 0, \tag{63}$$
линейные комбинации их решений также являются решениями.
- В общем случае $\mathscr{D}$ -- матричный дифференциальный линейный оператор не выше второго порядка.
  - Этот оператор зависит от координат x как через производные, так и в общем случае через возможную явную зависимость коэффициентов, присутствующих в нём
  - Пример: оператор Клейна-Гордона-Фока $(\partial^2 + m^2)$
  - Пример: оператор Дирака $(i\hat{\partial} - m)$

- **Как решать уравнение (63)?** $\to$ Метод разделения пременных! $\Leftrightarrow$ разложение по базису в линейном(ых) пространстве(ах), в том числе функцианальном, которому(ым) принадлежит искомая функция $u_a(x)$.
- **Почему?** $\to$ Уравнения линейны $\Rightarrow$ сумма решений снова решение $\Rightarrow$ стремимся к тому, чтобы уравнение расщепилось и, тем самым, упростилось, становясь системой *независимых* уравнений на каждую базисную функцию или, как говорят, *моду*.
- **Как этого добиться? Или как построить такой базис?** $\to$ Воспользоваться соображениями симметрии:
  - Симметрия $\Leftrightarrow$ действие $S[u(x)] = S[u'(x')] \Rightarrow$
  - Уравнения движения $\dfrac{\delta S}{\delta u}$ преобразуются определённым образом при преобразованиях симметрии $\Rightarrow$
  - Генераторы преобразований (или сами преобразования в случае дискретных симметрий) (анти)коммутируют с $\mathscr{D}(x) \Rightarrow$
  - В силу (анти)эрмитовости генераторов и $\mathscr{D}(x)$ их можно одновременно диагонализовать, а система собственных векторов образуют

искомый базис

NB: Уравнение движение можно рассматривать как сужение всего пространства функций на подпространство, натянутое на нулевые (соответствующие нулевым собственным значениям) базисные векторы оператора $\mathscr{D}(x)$.

$$\Downarrow$$

Рецепт решения:

1. Находим максимально возможное число симметрий системы.
2. Для непрерывных симметрий находим генераторы соответствующих преобразований:

- Симметрия $\Rightarrow$ если $u(x)$ -- решение (63), то и преобразованное поле $u'(x)$ также должно быть решением

$$\mathscr{D}(x)u'(x) = 0. \tag{64}$$

- Рассмотрим непрерывные глобальные инфинитозимальные преобразования, о которых идёт речь в теореме Нётер,

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \ , \quad \delta x^\mu = X^\mu_{(n)} \delta\omega_n \ , \tag{65}$$

$$u_a(x) \to u'_a(x') = u_a(x) + \delta u_a(x) \ , \quad \delta u_a(x) = \Psi_{a(n)} \delta\omega_n \ , \tag{66}$$

где по повторяющемуся индексу (n) подразумевается суммирование.

- Поля $u_a(x)$ образуют линейное представление группы симметрии $\Rightarrow$ генераторы $\Psi_{a(n)}(u(x))$ линейны по полям

$$\Psi_{a(n)}(u(x)) = \Sigma^b_{a(n)} u_b(x), \tag{67}$$

где $\Sigma^b_{a(n)}$ -- не зависящие от полей коэффициенты, которые мы также будем называть генераторами преобразований поля.

- Формула (66) задаёт полную или *существенную* вариацию функции поля. Для нахождения $u'(x)$ нам требуется найти *локальную* вариацию $\overline{\delta u(x)} \equiv u'(x) - u(x)$. Напишем с точностью до первого порядка малости по $\delta\omega_n$

$$u'_a(x) = u'_a(x' - \delta x) = u'_a(x') - \delta x^\mu \partial_\mu u_a(x) \overset{(65)-(67)}{=} u_a(x) + \left(\Sigma^b_{a(n)} - \delta^b_a X^\mu_{(n)} \partial_\mu\right) u_b(x) \delta\omega_n.$$

- Введём обозначение

$$\mathscr{T}^b_{a(n)} = i\left(\delta^b_a X^\mu_{(n)} \partial_\mu - \Sigma^b_{a(n)}\right), \tag{68}$$

тогда

$$u'_a(x) = \left(\delta^b_a + i\delta\omega_n \mathscr{T}^b_{a(n)}\right) u_b(x). \tag{69}$$

- Величины $\mathscr{T}_{(n)}$ будем также называть генераторами симметрии. Именно эти генераторы должны (анти)коммутировать с $\mathscr{D}(x)$.
- Действительно, подставим (69) в (64) и используем (63)

$$\mathscr{D}^c_a(x)\mathscr{T}^b_{c(n)}u_b(x)\delta\omega_n = 0,$$

или, поскольку $\delta\omega_n$ независимы и постоянны,

$$\mathscr{D}^c_a(x)\mathscr{T}^b_{c(n)}u_b(x) = 0. \qquad (70)$$

- Достаточным условием выполнения этих уравнений является перестановочность операторов $\mathscr{D}$ и $\mathscr{T}_{(n)}$:

$$\{\mathscr{D}, \mathscr{T}_{(n)}\}_\pm = \mathscr{D}\mathscr{T}_{(n)} \pm \mathscr{T}_{(n)}\mathscr{D} = 0.$$

В этом случае уравнение (70) удовлетворяется в силу (63)

$$\mathscr{D}\mathscr{T}_{(n)}u = \mp\mathscr{T}_{(n)}\mathscr{D}u = 0.$$

3. В зависимости от постановки задачи выделяем среди операторов $\mathscr{T}_{(n)}$ максимальное число коммутирующих между собой

NB: Множество коммутирующих между собой операторов может быть расширено, если включить также произведения операторов $\mathscr{T}_{(n)}$ и их линейные комбинации. Очевидно, что такие конструкции также будут перестановочны и с оператором $\mathscr{D}$. Не оговаривая этого особо мы будем считать, что в набор $\mathscr{T}_{(n)}$ включены и такие операторы.

NB: Генераторы $\mathscr{T}_{(n)}$, вообще говоря, действуют в разных пространствах, например, в функциональном пространстве и в пространстве, соответствующем внутренней симметрии.

4. Находим собственные векторы и диаганализуем эти операторы.

5. Строим искомый базис $f^{a}_{\alpha}(x)$, где α -- индекс, нумерующий базисные векторы, который может принимать непрерывные значения, а a -- по-прежнему индекс, нумерующий поля, в виде прямого произведения базисных векторов, полученных в предыдущем пункте.

6. Подставляя разложение

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{a}(x) a_{\alpha},$$

где подразумевается интегрирование в случае, если α принимает непрерывные значения, а a_α -- постоянные коэффициенты, в уравнение (63), находим нулевые собственные векторы $f^0_{\alpha,a}$ оператора $\mathscr{D}$.

7. Искомое общее решение имеет вид

$$u_a(x) = \sum_{\alpha} f^0_{\alpha,a}(x) a_{\alpha}. \tag{71}$$

8. Подставим решение (71) в выражения для нётеровских зарядов, соответствующих симметриям, выбранным в п. 3. Замечательным является тот факт, что заряды в терминах амплитуд a_α становятся диагональными квадратичными формами.

NB: Причина:

- Свободное поле $\Rightarrow$ квадратичные формы
- Одни и те же симметрии для построения зарядов и решений $\Rightarrow$ генераторы $\mathscr{T}$ входят в выражения для зарядов $\Rightarrow$ одновременно диагонализуются заряды.

NB: При квантовании a_α становятся операторами.

NB: Благодаря неодносвязной структуре группы Пуанкаре, также как и для осциллятора, операторы a_α могут быть разбиты на две группы a^+ и a^-, которые могут быть проинтерпретированы как операторы рождения и уничтожения частиц.

NB: a_α зависят от способа выбора базиса $\Rightarrow$ интерпретация частиц зависит от базиса! $\Rightarrow$

- Частица не является фундаментальным понятием в КТП. Фундаментально квантовое поле.
- Интересные физические эффекты, например, эффект Унру -- возникновение теплового излучения в вакууме в ускоренной системе отсчёта.

NB: Тем не менее мы и в дальнейшем будем говорить о частицах, помня, однако, об ограниченности этого понятия.

О выборе базиса: импульс и спиральность

- Рассмотрим теорию свободного поля в d-мерном плоском пространстве-времени Минковского, инвариантную по отношению к действию группы Пуанкаре. Другими словами, действие системы инвариантно относительно собственных преобразований Лоренца $x' = \Omega \cdot x$ и трансляций $x' = x + a$.
- Эти два типа преобразований, вообще говоря, не коммутируют между собой: $\Omega \cdot (x + a) = \Omega \cdot x + \Omega \cdot a \neq a + \Omega \cdot x \Rightarrow$
- Не коммутируют и генераторы преобразований $\Rightarrow$ не можем диаганализовать их одновременно.
- Используя общую формулу (68), найдём генераторы трансляций

$$p_\mu = i\partial_\mu \tag{72}$$

-- квантовомеханический оператор импульса, и лоренцевых поворотов

$$\mathscr{J}^{b}_{a\mu\nu} = i\left(\left[x_\nu\partial_\mu - x_\mu\partial_\nu\right]\delta^b_\alpha - \Sigma^b_{a\mu\nu}\right) = \left[x_\nu p_\mu - x_\mu p_\nu\right]\delta^b_\alpha - i\Sigma^b_{a\mu\nu} \tag{73}$$

-- квантовомеханический оператор полного момента.

- Очевидно, что эти операторы не коммутируют, так как оператор орбитального момента (слагаемое в квадратных скобках) явно зависит от x.
- Из этих операторов можно составить нетривиальный оператор, который будет коммутировать с оператором импульса. Именно, в операторе

$$\mathscr{W}^{b\mu}_{a} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathscr{J}^{b}_{a\nu\lambda}p_\rho \tag{74}$$

отсутствует явная зависимость от координат, и поэтому он коммутирует с p.

- Он также коммутирует с $\mathscr{D}$, так как представляет собой произведение коммутирующих с $\mathscr{D}$ операторов.

- Среди компонент вектора $\mathscr{W}^{\mu}$ наибольший физический интерес представляет нулевая, а именно

$$\mathscr{P}_a^b = \frac{\mathscr{W}_a^{b0}}{|\mathbf{k}|} = \frac{i}{2}\Sigma_{aij}^b \varepsilon_{ijk}\frac{k_k}{|\mathbf{k}|} \equiv \frac{\mathbf{s}_a^b\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \tag{75}$$

-- оператор проекции спина на направление движения: *поляризация* или *спиральность*, коммутирует с p_μ и $\mathscr{D}$.

- Этот оператор характеризует поляризационные свойства поля (частицы) $\Rightarrow$

- Набора коммутирующих операторов: оператор импульса p и поляризации $\mathscr{P}$ $\Rightarrow$ соответствующие нётеревские заряды (в частности, энергия P^0) будут диагональны в терминах амплитуд a.

- Собственными функциями оператора p_μ с собственными значениями k_μ являются плоские монохроматические волны

$$i\partial_\mu g_k(x) = k_\mu g_k(x) \quad \Rightarrow$$

$$g_k(x) = \frac{\mathrm{e}^{-ikx}}{(2\pi)^{d/2}}, \tag{76}$$

где численный множитель получен из условия ортонормированности в d-мерном пространстве-времени

$$\int d^d x g_k^*(x) g_q(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d x \mathrm{e}^{ix(k-q)} = \delta^d(q-k).$$

- В силу эрмитовости оператора p_μ система функций $g_k(x)$ удовлетворяет условию полноты («разложению единицы»)

$$\int d^d k g_k^*(x) g_k(y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \mathrm{e}^{ik(x-y)} = \delta^d(x-y),$$

и поэтому образуют базис в пространстве функций $u(x)$, нумеруемый непрерывным индексом k,

$$u(x) = \int d^d k g_k(x) u_k = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int d^d k \mathrm{e}^{-ikx} u_k \tag{77}$$

с коэффициентами разложения -- «координатами» -- u_k.

NB: Разложение (77) является не чем иным, как преобразованием Фурье или, как говорят в контексте квантовой теории, переходом в импульсное пространство.

- Подставляя разложение (77) в уравнение движения, получим

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int d^dk\mathrm{e}^{-ikx}\mathscr{D}_a^b(k)u_{b,k}=0, \tag{78}$$

где в силу трансляционной инвариантности мы учли, что оператор $\mathscr{D}(x)$ не зависит явно от x, а оператор $\mathscr{D}(k)$ получен из оператора $\mathscr{D}(x)$ путем замены производных ∂_μ на $-ik_\mu$.

- Благодаря полноте системы (76) уравнение (78) может быть выполнено, только если

$$\mathscr{D}_a^b(k)u_{b,k}=0. \tag{79}$$

- Уравнение (79) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, необходимым условием существования решений которого является обращение детерминанта матрицы $\mathscr{D}(k)$ в ноль.
- Это накладывает ограничения на импульс k_μ. Из этих ограничений можно получить связь между нулевой компонентой импульса (энергией) и

пространственными компонентами

$$k_n^0 = k_n^0(\mathbf{k}) \tag{80}$$

-- *закон дисперсии*, где индекс n нумерует решения уравнения $\det \mathscr{D} = 0$.

- Далее
  - в разложении (77) проинтегрируем по поверхности, задаваемой (80), перейдя тем самым к $(d-1)$-мерному пространственному интегралу Фурье и сузив полное функциональное пространство векторов u_k до подпространства нулевых мод оператора [1] $\mathscr{D}(k)$: $u_n(\mathbf{k}) \sim u(k_n^0(\mathbf{k}), \mathbf{k})$.
  - необходимо «доразложить» векторы $u_n(\mathbf{k})$ по базису, составленному из собственных функций оператора поляризации (75)

$$\mathscr{P}_a^b u_b^{n,\sigma}(\mathbf{k}) = \sigma u_a^{n,\sigma}(\mathbf{k}). \tag{81}$$

[1] Здесь и далее до конца раздела мы используем символ пропорциональности вместо знака равенства, так как в дальнейшем при изучении конкретных полей для удобства нам придется несколько изменить нормировки и обозначения.

- В итоге решение уравнения (63) будет представимо в виде

$$u_a(x) \sim \sum_{n,\sigma} \int d\mathbf{k} e^{i(k_n^0 x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})} a_\sigma^n(\mathbf{k}) u_a^{n,\sigma}(\mathbf{k}), \tag{82}$$

где $a_\sigma^n(\mathbf{k})$ -- произвольные амплитуды, которые после квантования становятся операторами.

NB: Если в задаче имеются другие симметрии, например, внутренние, генераторы которых переставимы с рассмотренными выше, то следует также «доразложить» решение по собственным векторам этих генераторов. При этом, конечно, у амплитуд $a_\sigma^n(\mathbf{k})$ и векторов поляризаций $u_a^{n,\sigma}(\mathbf{k})$ появятся дополнительные индексы, соответствующие собственным значениям этих генераторов.

- Подставляя полученное решение (82) в выражения для нётеревских зарядов, убеждаемся, что те заряды, которые соответствуют выбранным нами коммутирующим преобразованиям симметрии, принимают вид

$$Q \sim \sum_{n,\sigma,\ldots,q,\ldots} \int d\mathbf{k}\, q \cdot (a^n_{\mathbf{k},\sigma,\ldots,q,\ldots})^* a^n_{\mathbf{k},\sigma,\ldots,q,\ldots}, \tag{83}$$

  где q -- собственное значение генератора преобразований (68), соответствующего симметрии, определяющей заряд Q.

- Замечательным является то, что Q в терминах амплитуд a становится диагональной (в силу коммутативности преобразований) квадратичной (в силу квадратичности по полям лагранжиана) формой.

- Собственные значения q в этой формуле появляются благодаря тому факту, что выражение для нётеровского тока содержит в себе генератор $\mathcal{T}$: сравните выражение для генератора (68) и выражение для нётеровского тока.

- Выражение (83) для заряда позволяет интерпретировать произведение $(a^n_q)^* a^n_q$ как плотность числа частиц с зарядом q.

О выборе базиса: энергия и момент

- Другой набор коммутирующих генераторов: в качестве таких операторов часто, как и в квантовой механике, выбирают p_0, проекцию на какую-либо ось трёхмерного вектора углового момента и квадрат последнего.
- В этом случае вместо разложения по плоским волнам (77) мы придём к преобразованию Фурье по времени и разложению по сферическим гармоникам для получения зависимости решения от пространственных координат.
- Очевидно, что полученный таким образом базис не будет совпадать с рассмотренным выше.
- Но поскольку новый базис по-прежнему является базисом в том же пространстве решений $u(x)$, то он может быть получен путём некоторого, вообще говоря, бесконечномерного унитарного преобразования из рассмотренного выше.

- Соответственно новые амплитуды, представляющие по сути собой координаты разложения $u(x)$ по базису, могут быть получены из амплитуд $a_{\mathrm{k},\ldots}$ путём обратного преобразования. Такие преобразования в общем случае называются *преобразованиями Боголюбова*.
- При этом изменится и интерпретация в терминах частиц: частица с определённым моментом будет представлять собой суперпозицию бесконечного числа частиц с определённым импульсом. И если последние в каком-то смысле можно представить как материальные точки, распространяющиеся в определённом направлении, то состояния с определённым моментом с трудом поддаются такой интепретации.

Скалярное поле

- Наиболее общий лагранжиан свободного действительного скалярного

$$x \to x' = Lx, \quad \varphi'(x') = \varphi(x) \tag{84}$$

поля

$$\mathscr{L} = a(\partial\varphi)^2 + b\varphi^2 + c\varphi + d\ , \tag{85}$$

$a, b, \ldots$ -- константы.

- При $b \neq 0$ замена

$$\varphi + \frac{c}{2b} \mapsto \varphi \ \Rightarrow \tag{86}$$

- Плотность энергии

$$\mathscr{L} = a(\partial\varphi)^2 + b\varphi^2 \ \Rightarrow \tag{87}$$

$$T^{00} = a\left((\partial_0\varphi)^2 + (\partial_i\varphi)^2\right) - b\varphi^2\ . \tag{88}$$

- Пусть $\varphi(x) \approx \mathrm{const}$ -- большое (в каком смысле?)

$$E = \int d^3 x T^{00} \simeq \int d^3 x(-b\varphi^2) > -\infty \Rightarrow b \leq 0 \tag{89}$$

- Пусть $|\partial_\mu \varphi|$ -- большие, $|\varphi|$ -- мало

$$E \simeq \int d^3 x a \left((\partial_0 \varphi)^2 + (\partial_i \varphi)^2\right) > -\infty \Rightarrow a > 0 \tag{90}$$

$a = 0$ -- не представляет интереса

Общий множитель перед лагранжианом не влияет на уравнения движения $\Rightarrow$ удобная каноническая нормировка

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \, . \tag{91}$$

NB: $m^2 \geq 0$ только для свободного поля

- Уравнение движения $=$ уравнение Клейна-Гордона

$$\partial^2\varphi + m^2\varphi = 0 \, . \tag{92}$$

- Преобразование Фурье $\Leftrightarrow$ разложение по базису e^{ikx} -- плоские волны

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4k e^{ik_\mu x^\mu} \tilde{\varphi}(k) \; . \qquad (93)$$

$$\varphi = \varphi^* \Rightarrow \tilde{\varphi}^*(k) = \tilde{\varphi}(-k) \; . \qquad (94)$$

NB: Можно раскладывать по другим базисам (сферические волны).

- Уравнение Клейна-Гордона

$$\partial^2\varphi + m^2\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk e^{ik_\mu x^\mu}(-k^2+m^2)\tilde{\varphi}(k) = 0 \quad \overset{e^{ikx}\text{-- базис}}{\Rightarrow} \qquad (95)$$

$$(k^2-m^2)\tilde{\varphi}(k) = 0 \Rightarrow \qquad (96)$$

$$\left[\begin{array}{l} k^2 \neq m^2 \Rightarrow \tilde{\varphi} = 0 \\ k^2 = m^2 \Rightarrow \tilde{\varphi}\text{-- произвольное} \end{array}\right. \Rightarrow \tilde{\varphi} = \delta(k^2-m^2)\varphi(k) \Rightarrow \qquad (97)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk \delta(k^2 - m^2) e^{ikx} \varphi(k) \ . \tag{98}$$

- Интегрируем по $k_0^2 = \vec{k}^2 + m^2$ (-- гиперболоид!) с помощью формулы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \delta(f(x)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \frac{|f'(x)|}{|f'(x)|} \delta(f(x)) = \int \frac{df}{|f'(x)|} \delta(f(x)) = \sum_{\text{по нулям } f(x)} \frac{1}{|f'(x)|} \tag{99}$$

- Нули $k^0_\pm = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. Производная $2k^0 \equiv 2k^0_+$. Связь между k^0_+ и $\vec{k}$ называется законом дисперсии $\Leftrightarrow$ формула Эйнштейна $E = mc^2$
- Итак

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x) \tag{100}$$

$$\varphi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k^0}} e^{\pm ikx} \varphi^\pm(\mathbf{k}) \Big|_{k^0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \tag{101}$$

где

$$\varphi^{\pm}(\mathbf{k}) \equiv \varphi^{\pm}_{\mathbf{k}} \equiv 1\cdot a^{\pm}(\mathbf{k}) \equiv 1\cdot a^{\pm}_{\mathbf{k}} = \frac{\varphi(\pm k)}{\sqrt{2k^0}}\Big|_{k^0=\sqrt{\vec{k}^2+m^2}}$$ -- трехмерные амплитуды (102)

- Выкладка для φ^-

$$(2\pi)^{3/2}\varphi^-(x) = \int \frac{d^3k}{2k^0} \mathrm{e}^{-i(k^0x^0+\vec{k}\vec{x})}\varphi(-k^0,\vec{k})\Big|_{k^0=k^0_+} \stackrel{\vec{k}\to-\vec{k}}{=} \tag{103}$$

$$\int \frac{d^3k}{2k^0} \mathrm{e}^{-i(k^0x^0-\vec{k}\vec{x})}\varphi(-k^0,-\vec{k})\Big|_{k^0=k^0_+} = \int \frac{d^3k}{2k^0}\mathrm{e}^{-ikx}\varphi(-k)\Big|_{k^0=k^0_+} = \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}}\mathrm{e}^{-ikx}\varphi^-(\mathbf{k})\Big|_{k^0=k^0_+} \tag{104}$$

- Подставляем (101) в тензор ЭИ и находим

$$P^{\mu} = \frac{1}{2}\int d\mathbf{k}\cdot k^{\mu}(\varphi^+(\mathbf{k})\varphi^-(\mathbf{k}) + \varphi^-(\mathbf{k})\varphi^+(\mathbf{k}))\ , \tag{105}$$

или в явно ковариантном виде

$$P^{\mu} = \frac{1}{2}\int dk\cdot k^{\mu}\theta(k^0)\delta(k^2-m^2)(\varphi^+(k)\varphi^-(k) + \varphi^-(k)\varphi^+(k))\ . \tag{106}$$

NB: $\varphi^{+}(\mathbf{k})\varphi^{-}(\mathbf{k})$ можно интепретировать как плотность числа частиц с импульсом $k^{\mu} = (\sqrt{\vec{k}^{2} + m^{2}}, \vec{k})$.

NB: Важно!!!: Получить (105), (106)

NB: Почему $\theta(k^{0})$ является релятивистским инвариантом и почему удобно интегрировать по k^{0} при получении (101)?

NB: Сравните представленный анализ со случаем гармонического осциллятора.

Поле как механическая система с бесконечным числом степеней свободы.

- $$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 \, .$$
- "Посадим" систему в "ящик" и на пространственную (но не временную!) решетку: N ячеек, нумеруемых $a = 1, \ldots, N$.
- В пределах одной ячейки считаем поле не зависящим от $\vec{x}_a$:

$$\varphi(t, \vec{x}_a) \equiv q_a(t) \text{-- обобщенные координаты!} \qquad (107)$$

- Градиентный член в лагранжиане $-(\partial_i\varphi)^2$ на решетке:

  1. Не содержит производных по времени
  2. Зависит от q_a, q_b -- квадратичная форма
  3. Имеет тот же знак, что и $-m^2$

- Поэтому градиентный член следует отнести к m^2 (свойство 1)
- Получим недиаганальную (свойство 2) знакоопределенную (свойство 3) квадратичную форму

$$-\frac{1}{2}q_a\Omega_{ab}q_b \tag{108}$$

- В результате приходим к лагранжиану (ср. с (27)), который следует диагонализовать. В терминах новых обобщенных координат (сохраняем для них те же обозначения)

$$L(t) = \int d^3x\mathscr{L}(\mathbf{x},t) = \sum_{a=1}^{N}\mathscr{L}(q_a(t),\dot{q}_a(t))\triangle V_a\,. \tag{109}$$

- $\Uparrow$ -- система с бесконечным ($N\to\infty$) числом степеней свободы

- Введем канонически сопряженный импульс

$$p_a(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_a} \triangle V_a \ , \tag{110}$$

- И плотность импульса

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t)} \ , \quad p_a = \pi_a \triangle V_a \ . \tag{111}$$

- Функцией Гамильтона нашей системы является

$$H = \sum_a T^{00}(\mathbf{x}_a, t) \triangle V_a = \sum_a p_a(t) \dot{q}_a(t) - L(t) \overset{N \to \infty}{=} \int d^3x (\pi \dot{\varphi} - \mathscr{L}) \ . \tag{112}$$

Каноническое квантование скалярного поля.

- Квантование $q_a(t), p_a(t) \to \hat{q}_a(t), \hat{p}_a(t)$
- Скобки Пуассона становятся коммутатором $\{,\} \to i[,] \Rightarrow$

$$[\hat{p}_a(t), \hat{q}_b(t)] = -i\delta_{ab} \tag{113}$$

или

$$[\hat{\pi}(\mathbf{x}_a, t), \hat{q}(\mathbf{x}_b, t)] = -i\frac{\delta_{ab}}{\triangle V_b} \overset{N\to\infty}{=} -i\delta^3(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) \ . \tag{114}$$

- В пределе непрерывного пространства получаем следующие *одновременные* коммутационные соотношения:

$$[\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{\varphi}(\mathbf{y}, t)] = [\hat{\dot{\varphi}}(\mathbf{x}, t), \hat{\varphi}(\mathbf{y}, t)] = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \ , \tag{115}$$

$$[\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{y}, t)] = 0 \ , \quad [\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t), \hat{\varphi}(\mathbf{y}, t)] = 0 \ . \tag{116}$$

- Квантовые уравнения движения (уравнение Гейзенберга)

$$i\frac{d\hat{A}(\hat{p},\hat{q})}{dt} = [\hat{A},\hat{H}]\ . \tag{117}$$

- Можно построить представление Фока $\Leftrightarrow$ представление чисел заполнения (сейчас делать не будем).

Заключение

- С помощью процедуры канонического квантования можно проквантовать любую систему. Однако эта процедура имеет один основной недостаток. В ней отсутствует *явная* релятивистская инвариантность, которую, конечно, можно восстановить.
- Поле (не только скалярное) представляет собой бесконечный набор осцилляторов. Его можно проквантовать теми же методами, что используются в квантовой механике.
- В частности, не используя решения уравнений движения, можно установить канонические коммутационные соотношения (115).
- Чтобы построить базис в пространстве состояний (что необходимо для проведения дальнейших вычислений) необходимо, как и в случае гармонического осциллятора, иметь явный вид решений классических уравнений, чем мы и займемся в дальнейшем.