

М.В. Либанов

КТП XVI. Аналитические свойства функций Грина и
матричных элементов

Содержание

Введение	2
Полнота гильбертова пространства	3
Оптическая теорема	9
Представление Челлена-Лемана	21
Аналитическая структура пропагатора	30
Итог	37

Введение

- ✳ S -матрицу можно построить, исходя из нескольких аксиом, наиболее важными из которых являются релятивистская инвариантность, унитарность и причинность.
- ✳ Эти аксиомы являются общими для различных динамических систем и, возможно, имеют более глубокий смысл, чем это представляется на сегодняшний день.
- ✳ Кроме того, эти аксиомы позволяют не только построить S -матрицу, но и выяснить аналитическую структуру матричных элементов и функций Грина, что в свою очередь приводит к нетривиальным соотношениям между амплитудами.
- ✳ Подчеркнем, что эти соотношения не опираются на теорию возмущений и, тем самым, позволяют продвинуться за ее рамки.
- ✳ Здесь познакомимся с простейшими из такого рода соотношений.

Полнота гильбертова пространства

- ✳ Важным элементом при выводе различных соотношений, основанных на аксиомах квантовой теории поля, является использование условий полноты.
- ✳ Рассмотрим сперва подпространство одночастичных состояний.
- ✳ Любое одночастичное состояние является суперпозицией одночастичных состояний с определенным импульсом:

$$|1\rangle = \int d\mathbf{k} c(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle, \quad (1)$$

$$|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{(2\pi)^3 \cdot 2k_0} a_{\mathbf{k}}^+ |0\rangle. \quad (2)$$

- ✳ Здесь опущены возможные внутренние индексы (спин, сорт частиц и т.д.).

- ✳ Состояние (2) нормированно релятивистски-инвариантным образом:

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{k} \rangle = (2\pi)^3 \sqrt{2p_0 2k_0} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \xrightarrow{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{k}} 2k_0 V . \rightarrow \quad (3)$$

- ✳ Единичный оператор, действующий на подпространстве одночастичных состояний, будет

$$1_{1\text{-част.}} = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}| . \quad (4)$$

- ✳ Выражение (4) легко обобщить на полное Гильбертово пространство.
- ✳ Действительно, в Гильбертовом пространстве действует эрмитов оператор полного (с учетом взаимодействия) гамильтониана,
- ✳ И оператор полного пространственного импульса.
- ✍ Очевидно, в силу закона сохранения импульса, эти операторы коммутируют. \rightarrow

- ✳ Можно выбрать базис в Гильбертовом пространстве, элементы которого являются собственными векторами гамильтониана и пространственного импульса.
- ✳ Чтобы построить такой базис, определим состояние $|\lambda_0\rangle$, как состояние с нулевым пространственным импульсом и энергией, которую мы обозначим m_λ — «масса» состояния $|\lambda_0\rangle$.
- ✳ Подействуем на состояние $|\lambda_0\rangle$ преобразованием Лоренца и перейдем в систему отсчета, в которой состояние $|\lambda_0\rangle$ приобретет импульс \mathbf{k} .
- ✳ Обозначим такое состояние $|\lambda_{\mathbf{k}}\rangle$.
- ✳ Энергия этого состояния будет тогда $k_0(\lambda) \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_\lambda^2}$.
- ✳ Пусть состояние $|\lambda_{\mathbf{k}}\rangle$ нормированно релятивистски-инвариантным образом, аналогичным (3). →
- ✳ Единичный оператор, действующий на всем Гильбертовом простран-

стве может быть записан в виде:

$$1 = |0\rangle\langle 0| + \sum_{\lambda} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0(\lambda)} |\lambda_{\mathbf{k}}\rangle\langle \lambda_{\mathbf{k}}|, \quad (5)$$

что и является условием полноты.

- ☞ Заметим, что нам потребовалось ввести состояние $|\lambda_0\rangle$, чтобы определить, что такое $|\lambda_{\mathbf{k}}\rangle$ и $k_0(\lambda)$.
- ☞ В принципе, может случиться так, что такого состояния нет: состояние $|\lambda_{\mathbf{k}}\rangle$ является безмассовым (таковым, например, является пион — связанное состояние двух кварков, — в пределе, когда массы кварков равны нулю).
- ✳ Тем не менее, формула (5) остается в силе и в этом случае.

- ★ Выберем теперь другой базис в Гильбертовом пространстве.
- ★ А именно, в Гильбертовом пространстве действуют эрмитовы операторы свободного гамильтониана, свободного пространственного импульса и числа частиц.
- ★ Эти операторы коммутируют между собой.
- ★ Поэтому в качестве базиса можно выбрать вектора, являющиеся собственными векторами указанных операторов,
- ★ Т.е. вектора, характеризующие состояния с определенным числом частиц n , в которых каждая частица имеет определенное значение пространственного импульса \mathbf{k}_i и энергии $k_{0i} = \sqrt{\mathbf{k}_i^2 + m_i^2}$.
- ★ Эти вектора являются не чем иным, как фоковским базисом.
- ★ Будем считать, что они также нормированы релятивистски-инвариантным образом.

★ Условие полноты запишется тогда в виде

$$1 = \sum_{n=0} \left(\prod_{i=1}^n \int \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_{0i}} \right) |\{\mathbf{k}_i\}\rangle \langle \{\mathbf{k}_i\}|. \quad (6)$$

- ★ Подчеркнем, что уравнения (5), (6) записаны в разных базисах.
- ★ Эти базисы не совпадают, поскольку в общем случае полный гамильтониан не коммутирует ни со свободным оператором 4-х импульса, ни с оператором числа частиц (число частиц не сохраняется в квантовой теории поля).
- ★ В обоих разложениях присутствует вакуумный вклад $|0\rangle\langle 0|$.
- ★ Этот член, вообще говоря, различен в рассматриваемых базисах: в уравнении (5) это вектор с наименьшим собственным значением полного гамильтониана, а в (6) — свободного гамильтониана.
- ★ Мы договорились не различать эти вакуумы (различие в функциях Грина сводится к учету вакуумных диаграмм).
- ★ Мы и далее будем их не различать и обозначать $|0\rangle$, помня однако, что в сильновзаимодействующих теориях эти вакуумы могут быть не только отличны друг от друга, но и ортогональны.

Оптическая теорема

- ✳ Одним из простейших соотношений, вытекающих из аксиом квантовой теории поля, является *оптическая теорема*.
- ✳ Оптическая теорема следует из условия унитарности S -матрицы и отражает условие сохранения вероятности.
- ✳ Чтобы вывести оптическую теорему, запишем S -матрицу в виде

$$S = 1 + iT , \quad (7)$$

- ✳ Выделен явно единичный оператор, соответствующий переходам без взаимодействия.
- ✳ Из представления (7) следует условие унитарности в операторной форме:

$$S^\dagger S = 1 = 1 + i(T - T^\dagger) + T^\dagger T . \quad (8)$$

- * Вычислим теперь матричный элемент перехода из какого-либо начального состояния $|i\rangle$ в конечное состояние $|f\rangle$ от обеих частей операторного равенства (8)

$$\langle f|T|i\rangle - \langle f|T^\dagger|i\rangle = i\langle f|T^\dagger T|i\rangle . \quad (9)$$

- * Воспользуемся условием полноты гильбертова пространства состояний в форме (6) для вывода оптической теоремы.
- * Вставим единичный оператор (6) между операторами T^\dagger и T в правой части равенства (9):

$$\langle f|T|i\rangle - \langle f|T^\dagger|i\rangle = i \sum_{n=0} \left(\prod_{i=1}^n \int \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_{0i}} \right) \langle f|T^\dagger|\{\mathbf{k}_i\}\rangle \langle \{\mathbf{k}_i\}|T|i\rangle . \quad (10)$$

- * Выделим теперь δ -функции, отвечающие закону сохранения импульса, и перейдем от T к \mathcal{M} -матрице:

$$\langle f|T|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \mathcal{M}_{fi} , \quad (11)$$

где p_i и p_f — импульсы начального и конечного состояний соответственно.

★ Подставляя (11) в (10), получаем

$$\mathcal{M}_{fi} - \mathcal{M}_{fi}^\dagger = i(2\pi)^4 \sum_{n=0} \left(\prod_{l=1}^n \int \frac{d\mathbf{k}_l}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_{0l}} \right) \delta^4 \left(\sum_{l=1}^n k_l - p_i \right) \mathcal{M}_{fk_l}^\dagger \mathcal{M}_{k_l i}. \quad (12)$$

★ Таким образом мы получили **нелинейное** соотношение на матричные элементы переходов.

★ Рассмотрим теперь случай $|f\rangle = |i\rangle$, т.е. процесс упругого рассеяния вперед.

★ При этом левая часть соотношения (12) будет равна $2i\text{Im } \mathcal{M}_{ii}$,

★ Правая лишь множителем отличаться от полного «сечения» перехода из $|i\rangle$ во всевозможные состояния.

👉 Слово «сечение» взято в кавычки, так как состояние $|i\rangle$ необязательно содержит две реальных частицы.

- ★ Оно может содержать сколько угодно частиц, в том числе и виртуальных (в последнем случае вывод (12) легко обобщается).
- ★ Если, например, начальное состояние содержит одну частицу, то следует говорить о ширине распада.
- ★ Для определенности будем рассматривать случай, когда начальное состояние содержит две частицы с массами m_a и m_b , импульсами p_a и p_b , и спинами s_a и s_b , соответственно.
- ★ Если поляризация начального состояния нефиксирована, то

$$\sigma(i)_{\text{полн.}} = \frac{1}{(2s_a + 1)(2s_b + 1)} \cdot \frac{1}{4\sqrt{(p_a p_b)^2 - p_a^2 p_b^2}} \sum_n \int d\Phi_n |\mathcal{M}_{ik_n}|^2, \quad (13)$$

где

$$d\Phi_n = (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_{l=1}^n k_l - p_a - p_b\right) \prod_{l=1}^n \frac{d\mathbf{k}_l}{(2\pi)^3 2k_{0l}} \quad (14)$$

- ★ Подставляя (14) в (13) и сравнивая полученное выражение с пра-

вой частью (12), находим

$$\text{Im } \mathcal{M}_{ii} = 2(2s_a + 1)(2s_b + 1) \sqrt{(p_a p_b)^2 - p_a^2 p_b^2} \sigma(i)_{\text{полн}} . \quad (15)$$

✳ Это соотношение и носит название *оптической теоремы*.

👉 Подчеркнем, что это соотношение мы получили только исходя из требования унитарности S -матрицы, не опираясь на теорию возмущений.

✳ Если же теория возмущений применима для рассматриваемой теории, → можно разложить обе части равенства в ряд теории возмущений по константе связи.

✳ Сравнивая члены одинакового порядка по константе связи, мы получим соотношение между мнимой частью амплитуды \mathcal{M}_{ii} и полным сечением, вычисленным в низших порядках теории возмущений, например, между древесным сечением, и однопетлевой мнимой частью.

- ★ Продемонстрируем сказанное.
- ★ Рассмотрим в теории ϕ^4 процесс рассеяния $2 \rightarrow 2$.
- ★ Вычислим мнимую часть амплитуды такого процесса в однопетлевом приближении.
- ★ Матричный элемент такого процесса дается тремя диаграммами «рыба», соответствующими трем каналам реакции, с внешними линиями, соответствующими реальным частицам.
- ★ Для упругого рассеяния (которое мы и рассматриваем) $p_{1i} = p_{1f} = p_1$ — импульс первой частицы, $p_{2i} = p_{2f} = p_2$ — импульс второй частицы. \rightarrow

$$t = (p_{1i} - p_{1f})^2 = 0, \quad (16)$$

$$u = (p_1 - p_2)^2 = 2m^2 - 2p_1p_2, \quad (17)$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 2m^2 + 2p_1p_2. \quad (18)$$

- ★ Убедимся, что $p_1 p_2 > 0$.
- ★ Для этого перейдем в систему центра масс начальных частиц. В этой системе $p_{1,2} = (p_0, \pm \mathbf{p})$, поэтому

$$p_1 p_2 = p_0^2 + \mathbf{p}^2 \geq m^2 . \quad (19)$$

- ★ Поскольку $p_1 p_2$ — скаляр, то неравенство (19) справедливо в любой другой системе. →
- ★ Для упругого рассеяния $u \leq 0, s \geq 4m^2$.
- ★ Далее, петлевой интеграл для диаграммы «рыба» мы уже вычисляли.
- 👉 Заметим, что были получены выражения для функции Грина.
- ★ Для того чтобы получить матричные элементы, мы должны воспользоваться редуцированной формулой ЛСЦ.

- ★ Применяя ее, заметим, что мы получаем матричный элемент S -матрицы, который отличается от матричного элемента T -матрицы (а значит и \mathcal{M} -матрицы) не только выделенной единицей, но и мнимой единицей (см. (7)). →
- ★ Мнимой частью \mathcal{M} является не мнимая часть интеграла «рыба» (которая расходится и требует перенормировки), а мнимая часть от $I(p)/i$.
- ★ Эта мнимая часть отлична от нуля, только если одна из переменных $s, t, u \geq 4m^2$.
- ★ Однако, мы видели, что для упругого столкновения только $s \geq 4m^2$.
→
- ★ Поэтому

$$\text{Im } \mathcal{M}_{22} = \frac{\lambda^2}{32\pi} \sqrt{\frac{s - 4m^2}{s}}. \quad (20)$$

📌 Отметим, что это выражение порядка λ^2 .

- ✦ Вычислим теперь полное сечение $\sigma(2 \rightarrow \text{все, что угодно})$.
- ✦ Для того, чтобы сравнить его с (20), мы должны вычислить его в порядке λ^2 .
- ✦ Поскольку сечение пропорционально квадрату матричного элемента, \rightarrow матричный элемент должен быть порядка λ , \rightarrow
- ✦ Т.е. это матричный элемент перехода $2 \rightarrow 2$ в древесном приближении.
- ✦ Такой матричный элемент равен просто $\mathcal{M}_{22}^{\text{древ}} = -\lambda$. \rightarrow
- ✦ Полное сечение будет

$$\sigma = \frac{1}{2} \int \frac{|\mathcal{M}_{22}^{\text{древ}}|^2}{64\pi^2} \frac{1}{E_{\text{cm}}^2} d\Omega = \frac{\lambda^2}{32\pi} \frac{1}{E_{\text{cm}}^2}, \quad (21)$$

- ✦ Мы применили формулу для сечения в случае, когда все массы равны, а появление фактора $1/2$ в первом равенстве обязано тождественности частиц в конечном состоянии.

★ Энергия в системе центра масс равна \sqrt{s} .

★ Фактор потока в (15) в нашем случае равен

$$\sqrt{(p_a p_b)^2 - p_a^2 p_b^2} = \sqrt{\frac{s(s - 4m^2)}{4}}. \quad (22)$$

★ Подставляя (22) и (21) в правую часть (15), находим, что она равна

$$2\sqrt{\frac{s(s - 4m^2)}{4}} \frac{\lambda^2}{32\pi s} = \frac{\lambda^2}{32\pi} \sqrt{\frac{s - 4m^2}{s}}, \quad (23)$$

★ Т.е. в точности совпадает с (20).

- ✳ В рассмотренном случае оптическую теорему можно представить следующим графическим способом

$$2\text{Im} \left(\text{Diagram with bubble} \right) = \int d\Phi \left| \text{Diagram with X} \right|^2, \quad (24)$$

The diagram on the left shows a central bubble (a circle) with two external lines entering from the left and two exiting to the right. A vertical dashed line passes through the center of the bubble. This diagram is enclosed in large parentheses. To its right is an equals sign, followed by an integral over $d\Phi$. To the right of the integral is a diagram consisting of two lines crossing each other to form an 'X' shape. This 'X' diagram is enclosed in vertical bars with a superscript 2. A comma follows the vertical bars, and the number (24) is at the far right.

- ✳ Т.е. вставка полного набора состояний эквивалентна разрезанию диаграммы по внутренним линиям, и замены разрезанных пропагаторов линиями реальных частиц.
- ✳ Это, конечно, справедливо не только для рассматриваемого примера.
- ✳ Более того, чтобы вычислить мнимую часть вообще необязательно вычислять мнимую часть так, как мы это делали ранее.
- ✳ Чтобы ее вычислить, достаточно воспользоваться следующей фор-

мулой для свободного пропагатора

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{P}{k^2 - m^2} - i\pi\delta(k^2 - m^2) . \quad (25)$$

- * Легко убедиться, что мнимая часть произвольной амплитуды как раз и возникает из δ -функции в правой части (25).
- * Эта δ -функция соответствует как раз тому, что виртуальная частица, соответствующая пропагатору, «садится» на массовую поверхность, т.е. становится реальной.

Представление Челлена-Лемана

- ✳ Рассмотрим неперенормированный пропагатор (в терминах неперенормированных полей) в скалярной теории

$$\langle T(\varphi_0(x)\varphi_0(y)) \rangle_0 . \quad (26)$$

- ✳ Пусть $x_0 > y_0$. →

- ✳ Тогда в (26) можно опустить знак T -произведения.

- ✳ Вставим между полями в (26) единичный оператор в виде (5) и опустим несущественный для дальнейшего член $\langle \varphi_0(x) \rangle_0 \langle \varphi_0(y) \rangle_0$

- 👉 Этот член равен нулю для теорий, обладающих Z_2 -симметрией, таких как φ^4 ,

- 👉 Для полей высших спинов он всегда равен нулю в силу лоренц-инвариантности.

- 👉 Если $\langle \varphi_0(x) \rangle = C(\text{onst}) \neq 0$, то переопределим поле $\varphi_0(x) = \chi_0(x) + C$ → $\langle \chi_0(x) \rangle = 0$

✳ Имеем тогда

$$\langle \varphi_0(x) \varphi_0(y) \rangle_0 = \sum_{\lambda} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0(\lambda)} \langle 0 | \varphi(x) | \lambda_{\mathbf{k}} \rangle \langle \lambda_{\mathbf{k}} | \varphi(y) | 0 \rangle . \quad (27)$$

✳ Воспользуемся теперь тем фактом, что для гейзенберговских полей

$$\varphi_0(x) = e^{ixP} \varphi_0(0) e^{-iPx} , \quad (28)$$

где P — оператор полного, с учетом взаимодействия, импульса.

✳ Используя (28), преобразуем матричный элемент поля, стоящий в правой части (27), следующим образом

$$\begin{aligned} \langle 0 | \varphi_0(x) | \lambda_{\mathbf{k}} \rangle &= \langle 0 | e^{ixP} \varphi_0(0) e^{-iPx} | \lambda_{\mathbf{k}} \rangle = \\ &= \langle 0 | \varphi_0(0) | \lambda_{\mathbf{k}} \rangle e^{-ikx} \Big|_{k_0=k_0(\lambda)} = \\ &= \langle 0 | \varphi_0(0) | \lambda_0 \rangle e^{-ikx} \Big|_{k_0=k_0(\lambda)} , \end{aligned} \quad (29)$$

👉 Во второй строке мы воспользовались тем, что $|0\rangle$ и $|\lambda_{\mathbf{k}}\rangle$ — собственные вектора импульса с собственными значениями 0 и k ($k_0 = k_0(\lambda) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$),

✎ В третьей строке воспользовались лоренц-инвариантностью $|0\rangle$ и $\varphi_0(0)$.

★ Действительно, по построению состояние $|\lambda_k\rangle$ получено лоренцевым бустом из состояния $|\lambda_0\rangle$

★ Обозначая унитарный оператор, осуществляющий этот буст за U , имеем

$$\langle 0|\varphi_0(0)|\lambda_k\rangle = \langle 0|UU^{-1}\varphi_0(0)U|\lambda_0\rangle . \quad (30)$$

★ Но $U^\dagger|0\rangle = |0\rangle$ и $U^{-1}\varphi_0(0)U = \varphi_0(0)$, где последнее равенство справедливо *только* для скалярного поля:

★ для полей с ненулевыми спинами мы должны использовать нетривиальный закон преобразования поля при преобразованиях Лоренца.

★ Таким образом, мы приходим к (29).

✳ Подставим теперь (29) в (27) и используем тот факт, что при $x_0 > y_0$

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik(x-y)}}{2k_0(\lambda)} \Bigg|_{k_0(\lambda)=\sqrt{\mathbf{k}^2+m_\lambda^2}} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ik(x-y)}}{k^2 - m_\lambda^2 + i\varepsilon} \Bigg|_{x_0 > y_0} = -iG^c(x-y, m_\lambda). \quad (31)$$

✳ Получаем для пропагатора (26) (по-прежнему при $x_0 > y_0$)

$$\langle \varphi_0(x) \varphi_0(y) \rangle = \sum_\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_\lambda^2 + i\varepsilon} e^{-ik(x-y)} |\langle 0 | \varphi_0(0) | \lambda_0 \rangle|^2. \quad (32)$$

✳ Такое же выражение получается и при $x_0 < y_0 \rightarrow$

✳ Находим

$$\langle T(\varphi_0(x) \varphi_0(y)) \rangle = -i \sum_\lambda G^c(x-y, m_\lambda) |\langle 0 | \varphi_0(0) | \lambda_0 \rangle|^2. \quad (33)$$

✳ В этом выражении удобно выделить вклады с одинаковым значением m_λ^2 .

✳ Для этого воспользуемся тем, что

$$G^c(x, m_\lambda) = \int_0^\infty d\sigma^2 \delta(\sigma^2 - m_\lambda^2) G^c(x, \sigma) . \quad (34)$$

✳ Подставляя (34) в (33) окончательно получаем *спектральное представление Челлена-Лемана для пропагатора*

$$\langle T(\varphi_0(x)\varphi_0(y)) \rangle = -i \int_0^\infty \frac{d\sigma^2}{2\pi} G^c(x-y, \sigma) \rho(\sigma^2) , \quad (35)$$

где $\rho(\sigma^2)$ называется *спектральной функцией*:

$$\rho(\sigma^2) = \sum_\lambda (2\pi) \delta(\sigma^2 - m_\lambda^2) |\langle 0 | \varphi_0(0) | \lambda_0 \rangle|^2 . \quad (36)$$

✳ Очевидно, что по своему определению спектральная функция *положительно определена*.

✳ Ее характерное поведение для стабильной частицы показано на Рис. 1.

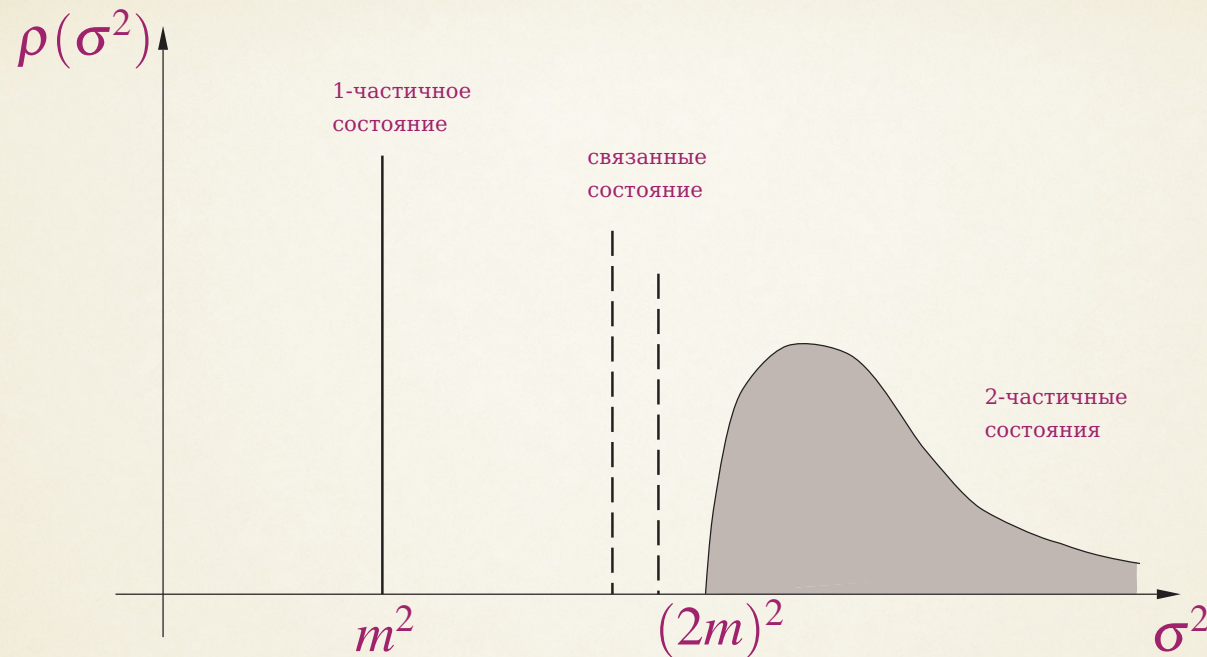


Рис. 1: Спектральная функция для стабильной частицы.

- ★ Действительно, если частица стабильна, то не существует состояний, в которые эта частица может распасться, →
- ★ Следовательно, для любого состояния, отличного от одночастичного, мы будем иметь $m_\lambda > m$, где m — физическая, т.е. непосредственно наблюдаемая, масса одночастичного состояния. →
- ★ Одночастичное состояние дает только δ -образный вклад в спектральную функцию.

★ Выделим его:

$$\rho(\sigma^2) = 2\pi\delta(\sigma^2 - m^2) \cdot Z + \theta(\sigma^2 - (2m)^2)\rho(\sigma^2) . \quad (37)$$

★ Второй член в этом уравнении содержит вклады по крайней мере от двухчастичных состояний (мы пренебрегли возможностью существования связных состояний, энергия покоя которых в любом случае больше m).

★ В уравнении (37) Z — некоторая константа, равная

$$Z = |\langle 0 | \varphi_0(0) | 1 \rangle|^2 . \quad (38)$$

★ Эта константа является не чем иным, как вероятностью образования одной частицы из вакуума полем φ_0 .

★ В свободной теории эта вероятность равна 1:

$$Z = |\langle 0 | \varphi_0^{\text{св}}(0) | 1 \rangle|^2 = 1 . \quad (39)$$

- ✳ Если мы потребуем теперь, чтобы вероятность образования одной частицы из вакуума взаимодействующим полем была также равна 1, \rightarrow
- ✳ Мы должны ввести перенормированное поле $\varphi_0 = \sqrt{Z}\varphi$, \rightarrow
- ✳ Z — константа перенормировки поля.
- ✳ Уже из интерпретации Z как вероятности видно, что она не может быть больше единицы.
- ✳ В этом можно убедиться явно.
- ✳ Для этого воспользуемся представлением Челлена-Лемана для коммутатора двух полей (получить!):

$$\langle 0 | [\varphi_0(x), \varphi_0(y)] | 0 \rangle = -i \int_0^\infty \frac{d\sigma^2}{2\pi} \rho(\sigma^2) D(x-y, \sigma), \quad (40)$$

- ✳ Здесь $\rho(\sigma^2)$ дается уравнениями (36), (37) (т.е. та же самая, что и в представлении для пропагатора),

- ★ $D(x - y, \sigma)$ — функция Паули-Йордона для поля с массой σ .
- ★ Продифференцировав обе части равенства (40) по x_0 , беря предел $x_0 \rightarrow y_0$ и учитывая канонические коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} \lim_{x_0 \rightarrow y_0} \frac{\partial}{\partial x_0} \langle [\varphi_0(x), \varphi_0(y)] \rangle_0 &= \langle [\dot{\varphi}_0(x_0, \mathbf{x}), \varphi_0(x_0, \mathbf{y})] \rangle_0 = \\ &= -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -i \lim_{x_0 \rightarrow y_0} \frac{\partial}{\partial x_0} D(x - y, \sigma), \quad \rightarrow \quad (41) \end{aligned}$$

- ★ Получаем

$$1 = \int_0^{\infty} \frac{d\sigma^2}{2\pi} \rho(\sigma^2) \stackrel{(37)}{=} Z + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d\sigma^2}{2\pi} \rho(\sigma^2). \quad (42)$$

- ★ Поскольку $\rho(\sigma^2) \geq 0$, то из (42) \rightarrow
- ★ $0 \leq Z \leq 1$, несмотря на то, что вычисление по теории возмущений, как мы видели, дает бесконечный ответ.
- ✍ Подчеркнем здесь, что с точки зрения теории перенормировок, Z , полученное нами в (38) — это перенормировка поля в схеме вычитаний на массовой поверхности.

Аналитическая структура пропагатора

- * Исследуем теперь с помощью представления Челлена-Лемана аналитические свойства пропагатора как функции импульса в комплексной плоскости.
- * Для этого перейдем в (35) импульсное представление:

$$\begin{aligned}
 -iG_2(p^2) &= \int_0^{\infty} \frac{d\sigma^2}{2\pi} \rho(\sigma^2) \frac{i}{p^2 - \sigma^2 + i\varepsilon} = \\
 &\stackrel{(37)}{=} \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d\sigma^2}{2\pi} \rho(\sigma^2) \frac{i}{p^2 - \sigma^2 + i\varepsilon}. \quad (43)
 \end{aligned}$$

- * Аналитическая структура уравнения (43) показана на Рис. 2.

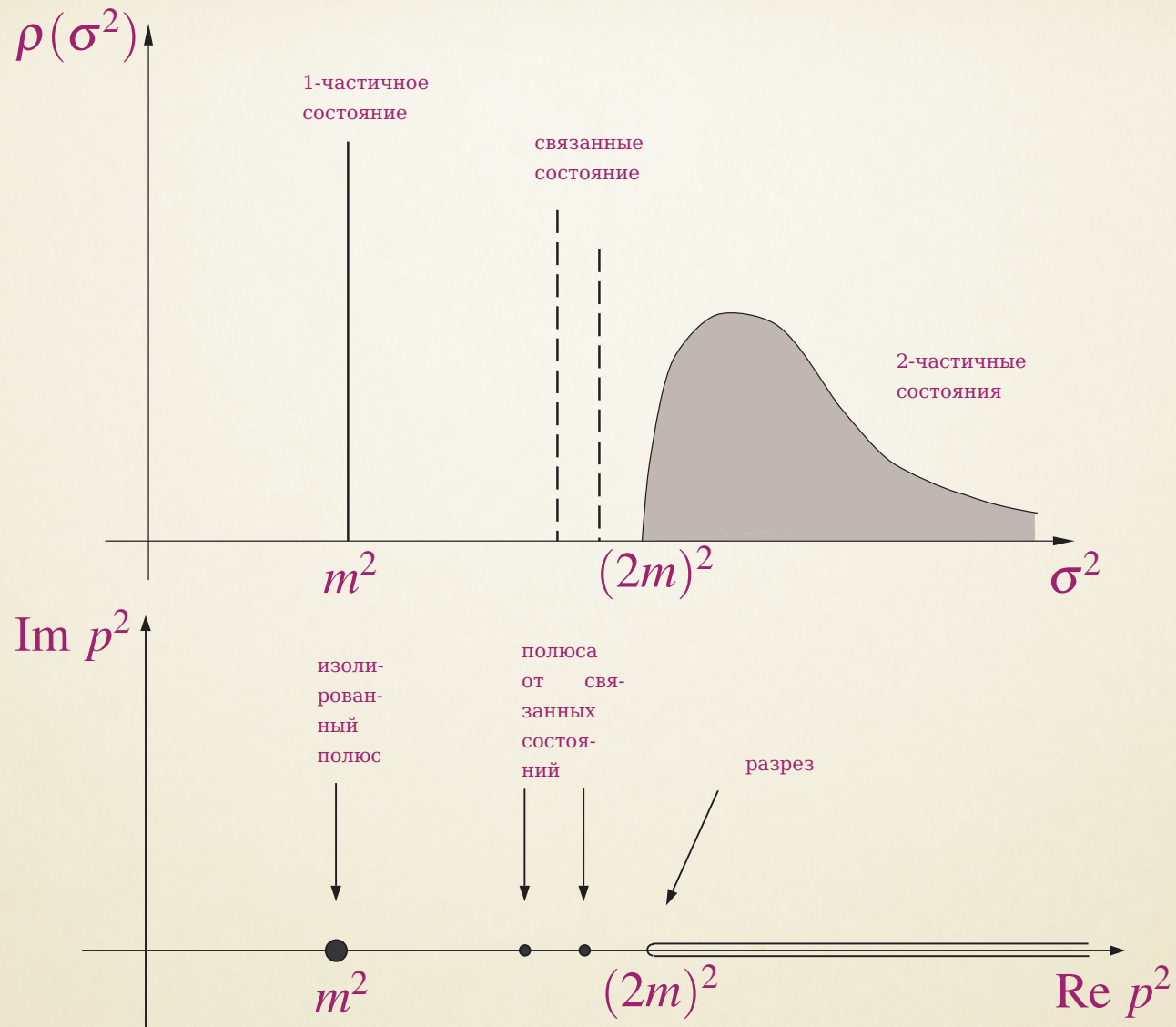


Рис. 2: Структура пропагатора в комплексной плоскости импульса p^2 .

- ✓ На действительной оси существует изолированный полюс, соответствующий одночастичному состоянию.
- ✓ Могут также существовать дополнительные полюса, соответствующие связанным состояниям.
- ✓ В точке $p^2 = 4m^2$, т.е. в точке, где $\rho(\sigma^2)$ становится непрерывной, начинается разрез.
- ✓ При этом в одночастичном полюсе вычет равен $(i)Z$.
- ✓ Других особенностей у пропагатора в комплексной плоскости импульса нет.
- ✓ В случае, если частица нестабильна, т.е. в теории присутствуют также другие поля, структура особенностей у пропагатора может измениться.
- ✓ В частности, одночастичный полюс сдвинется с действительной оси.

- ★ Вычислим теперь мнимую часть пропагатора $G_2(p^2)$ (но не $-iG_2(p^2)$!).
- ★ Воспользуемся для этого формулой (25) для свободного пропагатора
- ★ Учтем, что ρ — действительная функция по определению. →
- ★ Тогда из (43) получаем

$$G_2(p^2) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\sigma^2 \frac{\rho(\sigma^2)}{p^2 - \sigma^2 + i\varepsilon} = -\frac{1}{2\pi} P \int_0^\infty d\sigma^2 \frac{\rho(\sigma^2)}{p^2 - \sigma^2} + \frac{i}{2} \rho(p^2). \quad (44)$$

- ★ При этом в уравнении (44) значение пропагатора берется на верхнем берегу разреза: $p^2 + i\varepsilon$.
- 👉 Заметим, что мнимая часть всегда положительна.
- ★ На нижнем берегу разреза действительная часть остается прежней, а мнимая меняет знак:

$$\text{Im } G_2(p^2 - i\varepsilon) = -\frac{1}{2} \rho(p^2). \quad \rightarrow \quad (45)$$

★ Следовательно на разрезе G_2 имеет скачок:

$$G_2(p^2 + i\varepsilon) - G_2(p^2 - i\varepsilon) = i\rho(p^2) = 2i\text{Im } G_2(p^2 + i\varepsilon). \quad (46)$$

★ Тогда спектральное представление (44) можно записать в виде

$$G_2(p^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma^2 \frac{\text{Im } G_2(\sigma^2)}{\sigma^2 - p^2 - i\varepsilon}. \quad (47)$$

★ Эту же формулу можно получить, используя формулу Коши для аналитической функции $G_2(\sigma^2)$.

★ Действительно, выберем контур, показанный на Рис. 3.

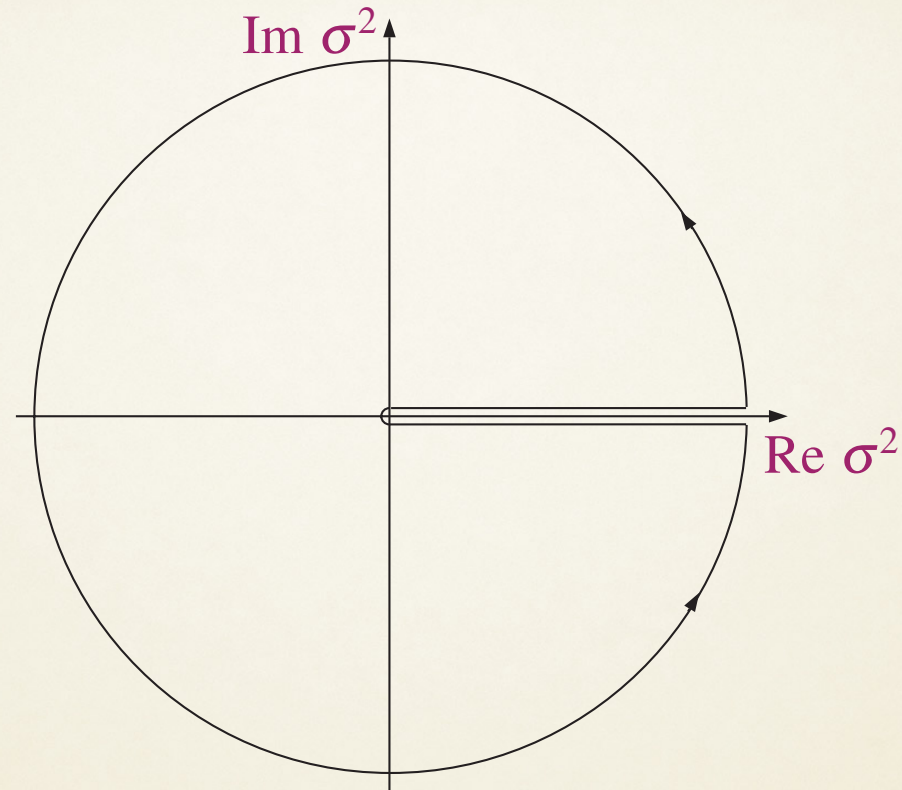


Рис. 3:

★ Тогда для любой аналитической функции

$$G_2(\sigma^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{G_2(\sigma'^2)}{\sigma'^2 - \sigma^2} d\sigma'^2. \quad (48)$$

- ★ Если $G_2(\sigma^2)$ достаточно быстро убывает на бесконечности, \rightarrow интеграл по большой окружности исчезает.
- ★ Интеграл же по берегам разреза приводит к (47), \rightarrow
- ★ С учетом (46), дает представление Челлена-Лемана.
- ★ Если же $G_2(\sigma^2)$ недостаточно быстро убывает, то можно применить формулу Коши к функции

$$\frac{G_2(\sigma^2)}{(\sigma^2 - a^2)^n}, \quad (49)$$

где $a^2 > 0$, n — произвольное натуральное число.

- ★ Тогда (47) принимает вид

$$G_2(p^2) = \frac{(p^2 - a^2)^n}{\pi} \int_0^\infty d\sigma^2 \frac{\text{Im } G_2(\sigma^2)}{(\sigma^2 - p^2 - i\varepsilon)(\sigma^2 - a^2)^n}. \quad (50)$$

- ★ Фактически, уравнение (50) соответствует тому, что мы вычитаем из $G_2(p^2)$ несколько первых членов в разложении в ряд Тейлора в окрестности точки $p^2 = a^2$,
- ★ Т.е. проводим перенормировку в импульсном пространстве.

Итог

- ✍ Свойства S -матрицы: релятивистская инвариантность, унитарность и причинность приводят к нетривиальным непертурбативным соотношениям между матричными элементами и/или функциями Грина
- ✍ Примерами таких соотношений являются Оптическая теорема и представление Челлена-Лемана
- ✍ Оптическая теорема позволяет получать **нелинейные** соотношения на матричные элементы переходов.
- ✍ Спектральное представление Челлена-Лемана является простейшим дисперсионным соотношением, определяющим величину по ее мнимой части.
- ✍ Введенная при выводе представления Челлена-Лемана спектральная плотность $\rho(\sigma^2)$ совпадает с точностью до множителя с шириной распада бозона с массой σ во всевозможные состояния.

- ✎ Таким образом, мнимая часть пропагатора связана с такой шириной.
- ✎ Этот же результат можно получить и из оптической теоремы.
- ✎ Представление Челлена-Лемана может быть легко обобщено на поля с произвольным спином.
- ✎ Основная сложность связана с нетривиальным законом преобразования таких полей при лоренцевых бустах (уравнения (29), (30)).
- ✎ В общем случае может потребоваться несколько инвариантных (скалярных) спектральных функций для представления многочастичных состояний.
- ✎ Однако это усложнение не появляется для одночастичного состояния, →
- ✎ Поэтому основной результат, состоящий в том, что одночастичное состояние дает изолированный полюс в точке m^2 с вычетом $0 \leq Z \leq 1$ остается без изменений.