

ОТО-3
(весна 2011)

Формулы

1. Интегрирование форм:

$$n! dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \rightarrow dx^1 \dots dx^n$$

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$$

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\rho$$

$$\text{Теорема Стокса: } \int_{\partial V_p} \hat{\omega}_{p-1} = p \int_{V_p} d\hat{\omega}_{p-1}$$

2. Оболочка Σ :

0-е условие сшивки:

$$\gamma_{ij}^\pm = \frac{\partial y_\pm^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial y_\pm^\nu}{\partial x^j} g_{\mu\nu}^\pm \Big|_\Sigma$$

$$\gamma_{ij}^+ = \gamma_{ij}^- = \gamma_{ij}$$

Гауссовы нормальные координаты:

$$ds^2 = \epsilon dn^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j$$

Внешняя нормаль:

$$u_\mu = \epsilon D_\mu n$$

Внешняя кривизна:

$$K_{\mu\nu} = D_\nu u_\mu \Big|_\Sigma$$

$$K_{ij} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^j} K_{\mu\nu} \\ = \mathcal{L}_u(u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu})$$

$$K_\mu^\mu = \theta$$

Тензор энергии-импульса:

$$T_{\mu\nu} = \delta(n) S_{\mu\nu}$$

$$u^\mu S_{\mu\nu} = 0, \quad D_\nu S_\mu^\nu = 0$$

Условие Израэля:

$$[K_i^j] - \delta_j^i [K] = -8\pi \epsilon S_i^j$$

3. Масса черной дыры:

$$M = \frac{1}{8\pi} \int_S dx^\mu \wedge dx^\nu \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} D^\lambda \xi^\rho$$

4. Двухпараметрическое семейство геодезических $x^\mu = x^\mu(s, \tau)$:

$$u^\mu = \partial x^\mu / \partial \tau, \quad u^\mu u_\mu = \epsilon$$

$$X^\mu = \partial x^\mu / \partial s \text{ — вектор отклонения}$$

$$v^\mu = u^\nu D_\nu X^\mu, \quad a^\mu = u^\nu D_\nu v^\mu$$

$$a^\mu = -R_{\nu\lambda\rho}{}^\mu u^\nu X^\lambda u^\rho$$

5. Конгруэнции геодезических:

$$B_{\mu\nu} = D_\nu u_\mu, \quad u^\mu B_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} u^\nu = 0$$

$$u^\nu D_\nu X^\mu = B^\mu{}_\nu X^\nu$$

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu$$

$$\theta = B_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} \text{ — расходимость}$$

$$\omega_{\mu\nu} = (B_{\mu\nu} - B_{\nu\mu})/2 \text{ — поворот}$$

$$\sigma_{\mu\nu} = (B_{\mu\nu} + B_{\nu\mu})/2 - \theta \gamma_{\mu\nu}/3 \text{ — сдвиг}$$

$$B_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \theta \gamma_{\mu\nu}/3$$

$$u^\nu D_\nu B_{\mu\lambda} = u^\nu u^\rho R_{\nu\lambda\mu\rho} - B^\nu{}_\lambda B_{\mu\nu}$$

Уравнение Райчаудхури:

$$d\theta/d\tau = u^\nu D_\nu \theta$$

$$= -R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} - \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} - \theta^2/3$$

Светоподобные геодезические: $k_\mu k^\mu = 0$

$$\hat{B}_{\mu\nu} = \hat{\omega}_{\mu\nu} + \hat{\sigma}_{\mu\nu} + \theta \hat{\gamma}_{\mu\nu}/2$$

$$d\theta/d\lambda = -k^\mu R_{\mu\nu} k^\nu + \hat{\omega}_{\mu\nu} \hat{\omega}^{\mu\nu} \\ - \hat{\sigma}_{\mu\nu} \hat{\sigma}^{\mu\nu} - \theta^2/2$$

6. Энергетические условия:

$$u^\mu u_\mu = 1, \quad k_\mu k^\mu = 0$$

$$T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \geq 0 \text{ — слабое}$$

$$R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \geq 0 \text{ — сильное}$$

$$R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \geq 0 \text{ — нулевое}$$

Задачи

1. Доказать, что внешняя производная от дифференциальной формы — дифференциальная форма (т.е. свертка *тензора* с дифференциалами).
2. Показать, что
$$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = \det(\partial y / \partial x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$
где $y = y(x)$, n — размерность многообразия.
3. Получить формулы Грина и Остроградского–Гаусса из теоремы Стокса.
4. Показать, что $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = \epsilon_{abcd} e_\mu^a e_\nu^b e_\lambda^c e_\rho^d$.
5. Показать, что $D_\kappa \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = 0$.
6. Вычислить массу черной дыры по формуле 3, используя сферу радиуса $R > 2M$.
7. Используя условия сшивки 2, получить уравнение движения для вакуумной сферической времениподобной оболочки, $S_i^j = s \delta_i^j$.
Указание. Выбрать метрику на поверхности оболочки в виде $ds^2 = d\tau^2 - \rho^2(\tau)d\Omega^2$ и получить уравнение на $\rho(\tau)$.
8. Показать, что вектор отклонения в 4 может быть выбран ортогональным к геодезическим, $u^\mu X_\mu = 0$, с помощью правильного выбора начала отсчета собственного времени, $\tau \rightarrow \tau' = \tau + f(s)$.
9. Вывести уравнение для отклонения геодезических 4.
10. Получить уравнение для сдвига $\sigma_{\mu\nu}$. Показать, что $R_{\mu\nu\lambda\rho} u^\nu u^\rho \neq 0$ в некоторой точке приводит к возникновению ненулевого сдвига $\sigma_{\mu\nu}$ в окрестности этой точки.
11. Вывести уравнение Райчаудхури для нулевых геодезических.

Список литературы

- [1] V.A. Berezin, V.A. Kuzmin, I.I. Tkachev, “Dynamics of bubbles in general relativity,” Phys. Rev. D **36**, 2919 (1987).