ОТО–2
(весна 2011)

Формулы

1. Красное смещение:
$$\frac{\omega_f}{\omega_i} = \left(\frac{1-2M/r_i}{1-2M/r_f}\right)^{1/2}$$

2. Геодезические: $\dot{} = d/d\tau$
$E = \dot{t}\,(1-2M/r)$
$L = r^2\dot{\phi}$
$\dot{r}^2/2 + V(r) = E^2/2$
$V(r) = \frac{1}{2}(1-2M/r)(\kappa + L^2/r^2)$

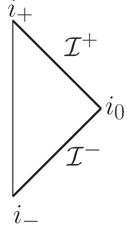
3. Ускорение:
$a^\mu = u^\nu D_\nu u^\mu$

4. Пространство Риндлера:
$ds^2 = x^2 dt^2 - dx^2$
$U = -x\,\mathrm{e}^{-t}\ , \ \ V = x\,\mathrm{e}^{t}$

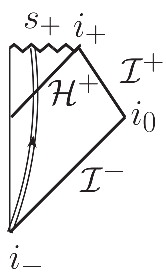
5. Координаты Крускала:
$r_* = r + 2M\ln(r/2M - 1)$
$U = -\exp\left[-(t-r_*)/4M\right]$
$V = \exp\left[(t+r_*)/4M\right]$
$$ds^2 = \frac{32M^3}{r}\,\mathrm{e}^{-r/2M} dU dV - r^2 d\Omega^2$$

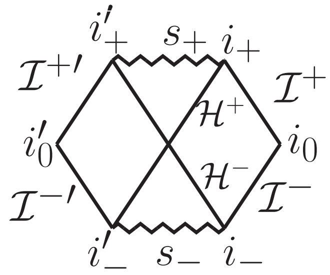
6. Конформное пробразование: $\bar{g}_{\mu\nu} = \Lambda^2\eta_{\mu\nu}$
$U = T - X = w\,\mathrm{arctg}\left(\frac{t-x}{w}\right)$
$V = T + X = w\,\mathrm{arctg}\left(\frac{t+x}{w}\right)$
$$d\bar{s}^2 = dT^2 - dX^2 - \frac{w^2}{4}\sin^2(2R/w)\,d\Omega^2$$

7. Диаграммы Пенроуза:



- i_0 — пространиственная бесконечность
- i_- (i_+) — временная бесконечность прошлого (будущего)
- $\mathcal{I}^-$ ($\mathcal{I}^+$) — светоподобная бесконечность прошлого (будущего)





- s_- (s_+) — сингулярность прошлого (будущего)
- $\mathcal{H}^-$ ($\mathcal{H}^+$) — горизонт белой (черной) дыры

Задачи

1. Показать, что кулоновское решение является единственным сферически–симметричным решением уравнений Максвелла в пустоте. Предположение о стационарности не использовать.

2. Показать, что радиус круговой орбиты в механике Ньютона равен $R = L^2/M$, где $L = vR$ — момент импульса, M — масса центрального тела.

3. Оценить период вращения перигелия Меркурия.

4. Найти минимум потенциала 2 и частоту колебаний около минимума.

5. Вывести выражение для отклонения луча света. *Указание.* Выразить $d\phi/dr$ из уравнений 2, затем воспользоваться разложением по $M/r \ll 1$.

6. Используя результаты предыдущей задачи, оценить отклонение луча света, проходящего вблизи поверхности Солнца.

7. С помощью вычисления афинного параметра вдоль геодизических показать, что пространство Риндлера — геодезически неполное.

8. Показать, что статические ($x = \mathrm{const}$) наблюдатели в пространстве Риндлера обладают постоянным собственным ускорением $a = 1/x$. Сравнить ускорение, вычисленное по формуле 3 с ускорением в плоском пространстве (U, V).

9. Вычислить собственное ускорение статических наблюдателей в пространстве Шварцшильда.

10. Показать, что радиальные светоподобные геодезические достигают сингулярностей решения Шварцшильда при конечных значениях афинного параметра.

11. Записать решение Шварцшильда в координатах Лематра

$$ds^2 = d\tau^2 - [dr - v(r)d\tau]^2 - r^2 d\Omega^2 \ , \tag{1}$$

где $\tau = t + f(r)$. Найти функции $v(r)$, $f(r)$. Показать, что метрика (1) не сингулярна при $r = 2M$. Показать, что τ — собственное время вдоль времениподобных геодезических, падающих на черную дыру из пространственной бесконечности с нулевой начальной скоростью; $v = dr/d\tau$ — скорость вдоль этих геодезических.