ОТО–1
(весна 2011)

Формулы

1. Обозначения:
   $\hbar = c = k_B = G_N = 1$
   $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$

2. Метрика:
   $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

3. Векторы:
   $\hat{A} = A^\mu \partial_\mu$
   $\hat{B} = B_\mu dx^\mu$

4. Ковариантная производная:
   $D_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} A^\lambda$
   $D_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda$
   $D_\mu(AB) = (D_\mu A)B + A(D_\mu B)$

5. Символы Кристоффеля:
   $D_\mu g_{\lambda\nu} = 0$
   $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \Gamma^\mu_{\lambda\nu}$
   $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho}(\partial_\nu g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\nu\lambda})$

6. Кривизна:
   $[D_\mu, D_\nu] A_\lambda = R_{\mu\nu\lambda}{}^{\rho} A_\rho$
   $[D_\mu, D_\nu] A^\lambda = -R_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda} A^\rho$
   $R_{\mu\nu\lambda}{}^{\rho} = \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\lambda} - \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\lambda} + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\rho_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa_{\nu\lambda}\Gamma^\rho_{\kappa\mu}$
   $R_{\mu\lambda} = R_{\mu\nu\lambda}{}^{\nu}$
   $\quad = \partial_\nu \Gamma^\nu_{\mu\lambda} - \partial_\mu \Gamma^\nu_{\nu\lambda} + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\nu_{\nu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{\kappa\mu}$
   $R = g^{\mu\lambda} R_{\mu\lambda}$

7. Свойства кривизны:
   $R_{\mu\nu\lambda\rho} = -R_{\mu\nu\rho\lambda} = -R_{\nu\mu\lambda\rho} = R_{\lambda\rho\mu\nu}$
   $R_{[\mu\nu\lambda]\rho} = 0$
   $D_{[\kappa} R_{\mu\nu]\lambda\rho} = 0$

8. Геодезическая:
   $S = -m \int ds$
   $\frac{d}{ds} u_\mu - u^\nu u_\kappa \Gamma^\kappa_{\mu\nu} = u^\nu D_\nu u_\kappa = 0$
   $u^\mu = dx^\mu/ds; \quad u_\mu^2 = 1$ или 0

9. Уравнения Эйнштейна:
   $S = -\frac{1}{16\pi} \int R\sqrt{-g} d^4x$
   $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$
   $R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right)$
   $T_{\mu\nu} = \dfrac{2}{\sqrt{-g}} \dfrac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}$

10. Уравнение Ньютона:
    $g_{00} = 1 + 2\Phi; \qquad T_{00} = \rho$
    $\Gamma^i_{00} = \partial_i \Phi; \qquad R_{00} = \Delta\Phi$
    $\Delta\Phi = 4\pi\rho$

11. Производная Ли:
    $y^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$
    $T^{\nu\prime}_\mu(x) = T^\nu_\mu(x) \Leftrightarrow \pounds_\xi T^\nu_\mu = 0$
    $\pounds_\xi T^\mu_\nu = \xi^\lambda D_\lambda T^\mu_\nu - T^\lambda_\nu D_\lambda \xi^\mu + T^\mu_\lambda D_\nu \xi^\lambda$

12. Вектор Киллинга:
    $\pounds_\xi g_{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow D_\mu \xi_\nu + D_\nu \xi_\mu = 0$
    $D_\mu D_\nu \xi_\lambda = -R_{\nu\lambda\mu\kappa} \xi^\kappa$

13. Законы сохранения:
    $I = u^\mu \xi_\mu; \; u^\lambda D_\lambda I = 0$

14. Статическая сферически–симметричная метрика:
    $ds^2 = f(r) dt^2 - h(r) dr^2 - r^2 d\Omega^2$
    $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2$

15. Тетрады:
    $e_{\mu a} e^\mu_b = \eta_{ab}; \qquad e_{\mu a} e^a_\nu = g_{\mu\nu}$
    $\omega_{\mu ab} = e^\nu_a D_\mu e_{\nu b}; \qquad \omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}$
    $e^\nu_a D_\mu A_\nu = \partial_\mu A_a + \omega_{\mu ab} A^b$
    $\hat{e}_a = e_{\mu a} dx^\mu; \qquad \hat{\omega}_{ab} = \omega_{\mu ab} dx^\mu$
    $\hat{R}_{ab} = R_{\mu\nu\lambda\rho} \, e^\mu_a e^\nu_b \, dx^\lambda \wedge dx^\rho$
    $d\hat{e}_a + \hat{\omega}_{ab} \wedge \hat{e}_b = 0$
    $\hat{R}_{ab} = 2\left(d\hat{\omega}_{ab} - \hat{\omega}_{ac} \wedge \hat{\omega}_{bc}\right)$

16. Для метрики 14:
    $\hat{e}_0 = \sqrt{f} \, dt \qquad \hat{e}_1 = \sqrt{h} \, dr$
    $\hat{e}_2 = r d\theta \qquad \hat{e}_3 = r \sin\theta d\phi$
    $\hat{\omega}_{01} = -\dfrac{f' dt}{2\sqrt{fh}} \qquad \hat{\omega}_{12} = \dfrac{d\theta}{\sqrt{h}}$

$$\hat{\omega}_{13} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{h}} d\phi \qquad \hat{\omega}_{23} = \cos\theta d\phi$$

$$\hat{R}_{01} = -\frac{1}{\sqrt{fh}} \left(\frac{f'}{\sqrt{fh}}\right)' \hat{e}^0 \wedge \hat{e}^1$$

$$\hat{R}_{02} = -\frac{f'}{rfh}\, \hat{e}^0 \wedge \hat{e}^2$$

$$\hat{R}_{03} = -\frac{f'}{rfh}\, \hat{e}^0 \wedge \hat{e}^3$$

$$\hat{R}_{12} = -\frac{h'}{rh^2}\, \hat{e}^1 \wedge \hat{e}^2$$

$$\hat{R}_{13} = -\frac{h'}{rh^2}\, \hat{e}^1 \wedge \hat{e}^3$$

$$\hat{R}_{23} = -\frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{1}{h}\right) \hat{e}^2 \wedge \hat{e}^3$$

$$R_{00} = \frac{1}{2\sqrt{fh}} \left(\frac{f'}{\sqrt{fh}}\right)' + \frac{f'}{rfh}$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2\sqrt{fh}} \left(\frac{f'}{\sqrt{fh}}\right)' + \frac{h'}{rh^2}$$

$$R_{22} = R_{33} = -\frac{f'}{2rfh} + \frac{h'}{2rh^2} + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h}\right)$$

17. Решение в пустоте:
    $f(r) = 1/h(r) = 1 - 2M/r$
    $R_S = 2M = 3\text{км} \cdot (M/M_{sun})$

18. Звезда:
    $T_{\mu\nu} = (p+\rho) u^\mu u^\nu - p g_{\mu\nu}$
    $u^\mu = e_0^\mu$
    $$h(r) = \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]^{-1}$$
    $m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$
    $$\Phi' \equiv \frac{f'}{2f} = \frac{m(r) + 4\pi p(r) r^3}{r\,[r - 2m(r)]}$$
    $$p' = -(p+\rho)\,\frac{m(r) + 4\pi p(r) r^3}{r[r - 2m(r)]}$$

19. Ограничения на звезду:
    $M \leq 4R/9$

Задачи

1. Показать, что коммутатор векторных полей — векторное поле с координатами
$$[\hat{A}, \hat{B}]^\mu = A^\nu \partial_\nu B^\mu - A^\nu \partial_\nu B^\mu = A^\nu D_\nu B^\mu - A^\nu D_\nu B^\mu \ .$$

2. Пусть поля $Y_a^\mu(x)$, $a = 1 \ldots 4$, образуют базис в каждой точке пространства–времени. Тогда соответствующие операторы $\hat{Y}_a$ образуют алгебру Ли. Вычислить структурные константы.

3. Проверить, что вычисленные в п. 10 компоненты связности и тензора кривизны параметрически велики по сравнению с остальными компонентами.

4. Доказать 11.

5. Показать, что $\pounds_A \hat{B} = [\hat{A}, \hat{B}]$.

6. Показать, что коммутатор векторов Киллинга – вектор Киллинга.

7. Найти векторы Киллинга, соответствующие вращениям $\mathbb{R}^3$. Показать, что они образуют алгебру $so(3)$.

8. Показать, что единственная сферически–симметричная двумерная метрика — метрика сферы.

9. Вычислить 16.

10. Получить выражение для радиуса Шварцшильда в системе СГС.

11. Проверить, что закон сохранения $D_a T_{ab} = 0$ дает последнее из уравнений 18.

12. Решить уравнения 18 для несжимаемой звезды
$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \ , r < R \ , \\ 0 \ , r > R \ . \end{cases}$$
Показать, что решение отсутствует при $M > 4R/9$, где M–гравитационная масса звезды.

13. Вывести ограничение
$$m_0 \le \frac{2}{9} r_0 \left[1 - 6\pi p_0 r_0^2 + (1 + 6\pi p_0 r_0^2)^{1/2}\right]$$
для кора звезды размера r_0 и массы m_0; $p_0 = p(r_0)$.

Список литературы

[1] R.M. Wald, “General relativity,” Univ. Chicago press, 1984.

[2] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, «Гравитация», Мир, 1977.

[3] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, «Курс теоретической физики», т. 2.