$\boxed{\text{ОТО} - 7}$ $\boxed{\text{Излучение Хокинга}}$

l_{pl} $\quad M_{pl}^{-2}$ - Константа разложения в ОТО

$$\mathcal{L} \sim M_p^2 R + R^2 + \frac{1}{M_p^2} R^3 + \dots$$

$\boxed{E \sim M_p}$ $\Leftrightarrow$ Квантовые поправки начинают доминировать

$\boxed{\text{расстояний меньше } l_{pl}}$

С другой стороны, l_{pl} - минимальная ~~длина~~

Δx

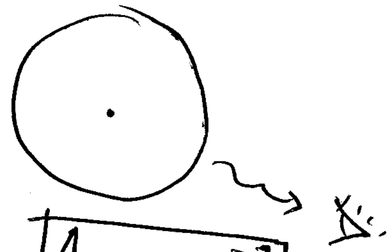
$$\Delta p \Delta x \sim 1 \Rightarrow \Delta E \sim \Delta p \sim 1/\Delta x$$

$$\boxed{R_s = G 2 \Delta E \sim \frac{2}{\Delta x} l_{pl}^2}$$

$\Delta x \lesssim l_{pl} \Rightarrow R_s \gtrsim l_{pl} \Rightarrow$ Частицу случала чёрная дыра

Хокинг $\quad$ Чёрная дыра излучает!

~~Как она излучает?~~



Термальный спектр с $\boxed{T_H = \frac{\varkappa}{2\pi} = \frac{1}{4\pi R_s}}$ $\quad \boxed{\text{А что ещё?}}$

$\boxed{\varkappa = \frac{1}{4M}}$

$$\boxed{T_H = \frac{\hbar}{2\pi}\frac{1}{4GM} = \frac{\hbar}{8\pi GM}}$$

$\boxed{\lambda_H \sim \frac{1}{T_H} \sim R_s}$ — $\boxed{\text{Характерная длина волны} \sim \text{размера горизонта}}$

$\boxed{\lambda_H \gg l_{pl}}$ $\Rightarrow$ Можно [illegible]

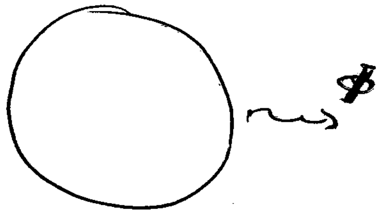
Итак $\quad M \sim M_{pl} \Rightarrow \boxed{R_s \sim l_{pl} \\ T \sim \frac{10^{19}\,GeV}{8\pi}}$

10^{-5} g

$$M = M_\odot \Rightarrow R_s \sim 3\,km \Rightarrow T_H = \frac{10^{-38}}{8\pi} M_{Pl} = \frac{10^{-19}}{8\pi} GeV = 10^{-10} eV = \frac{10^{-6}}{8\pi} K \simeq 10^{-7} K$$

Как будем считать?

- BH метрика задана
- Находим излучение б/м поля Φ, пренебрегая обратным влиянием на метрику



$$\boxed{G_{\mu\nu} = 8\pi \langle T_{\mu\nu} \rangle}$$

$$\frac{1}{R_s^2} \gg \frac{\rho_{изл}}{M_P^2} \sim \frac{\sigma T^4}{M_P^2} \sim \frac{M_P^6}{M^4 M_P^2}$$

$$R_s \sim \frac{M}{M_P^2} \ll \left(\frac{M_P^3}{M^2}\right)^{-1} = \frac{M^2}{M_P^3}$$

$$\boxed{\frac{M}{M_P} \gg 1} \Rightarrow$$ **Рассматриваем большую чёрную дыру**

Начнём с 1D квантовой механики

$$S = \int dt\, L = \int dt \left(\frac{\dot{x}^2}{2} - V(x,t) \right)$$

Потенциал зависит от времени

Квантуем.

(i) $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x}$

(ii) $\left.\begin{array}{l} p \mapsto \hat{p} \\ x \mapsto \hat{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \ddot{\hat{x}} + \dfrac{\partial \hat{V}}{\partial x} = 0$

Квантовые ур-ние для Гейзенберговых операторов

(iii) Канонические коммутационные соотношения

$$[\hat{p}, \hat{x}] = -i$$

Рассмотрим гармонический осциллятор

$$V(x,t) = \tfrac{1}{2}\, \omega^2(t)\, x^2$$

$$\boxed{\ddot{\hat{x}} + \omega^2(t)\, \hat{x} = 0}$$

Операторные решения ур-ния. 2-х параметрическое семейство решений

$$\left.\begin{array}{l} \hat{x}(0) \\ \dot{\hat{x}}(0) \end{array}\right\} \text{Определяют решение.}$$

Но пусть мы нашли комплексное решение $f(t)$

$$\boxed{\hat{x}(t) = f(t)\, \hat{a} + \bar{f}(t)\, \hat{a}^{+}}$$

$$\boxed{\ddot{f} + \omega^2 f = 0}$$

$$[x, \dot{x}] = i = \left[f(t)\hat{a} + \bar{f}(t)\hat{a}^{+},\ \dot{f}(t)\hat{a} + \dot{\bar{f}}(t)\hat{a}^{+} \right] =$$

$$= [a, a^{+}]\left(f\dot{\bar{f}} - \dot{f}\bar{f} \right) = i\, \langle f, f \rangle [a, a^{+}]$$

$$\boxed{\langle f,g\rangle = i(\bar f \dot g - \dot{\bar f} g)}$$

$$\boxed{\langle f,\bar f\rangle = 1} \Rightarrow \boxed{[a,a^+]=1}$$

это — операторы рождения / уничтожения.

$\#$ $\langle f,g\rangle$ не завис. от времени $\forall$ 2-х решений

$$\partial_t \langle f,g\rangle = i(\bar f \ddot g - \ddot{\bar f} g) =$$

$$= i(-\bar f g \omega^2 + \bar f g \omega^2) = 0 \quad \text{ч.т.д.}$$

$$\boxed{\langle f,\bar f\rangle = i(\bar f \partial_t f - \partial_t \bar f f) = 0} \Rightarrow \underline{\text{ортонормировка}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \langle f, x\rangle \\ a^+ &= -\langle \bar f, x\rangle \end{aligned}}$$

Не положительно определено

$$\langle \bar f,\bar f\rangle = +i(f\partial_t \bar f - \partial_t f \bar f) = -[\langle f,f\rangle]^* = -1$$

$$\overline{\langle f,g\rangle} = \overline{i(\bar f \partial_t g - \partial_t \bar f g)} = +i(-f\partial_t \bar g + \partial_t f \bar g) =$$

$$= \langle g,f\rangle = -\langle \bar f,\bar g\rangle$$

$$\overline{\langle f,f\rangle} = -\langle \bar f,\bar f\rangle$$

Гильбертово пространство $\boxed{a|0\rangle = 0}$ ← определение $|0\rangle$

Пусть $\boxed{\omega = const}$ $\Rightarrow$ энергия сохраняется

$$H = \frac{1}{2}\dot x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}(\dot f^2 a^2 + \dot f \dot{\bar f}(aa^+ + a^+a) + \dot{\bar f}^2 a^{+2}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\omega^2 (f^2 a^2 + \bar f^2 \bar a^2 + f\bar f(aa^+ + a^+a))$$

$$H|0\rangle = \frac{1}{2}\left(|\dot f|^2 + \omega^2 |f|^2\right)|0\rangle + {}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\dot f^2 + \omega^2 f^2\right)^* a^{+2}|0\rangle$$

$|0\rangle$ – собственная ф-ция $\Longrightarrow$ $\dot f = \pm i\omega f$

Выбирают обычно $\boxed{f = f_0 e^{-i\omega t}}$

$$\langle f, f\rangle = |f_0|^2 i \left(e^{+i\omega t} \overleftrightarrow{\partial_t} e^{-i\omega t}\right) =$$

$$= |f_0|^2\, 2\cancel{i}\,(+\cancel{i}\omega) = 1$$

Иначе не получить

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}}$$

$$\boxed{f = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t}}$$

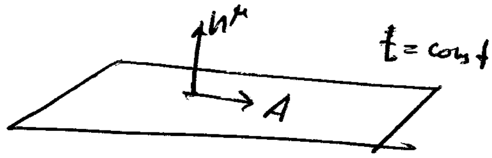
$$\boxed{H = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{2}\frac{\omega^{\cancel{2}}}{2\cancel{\omega}}\left(aa^+ + a^+a\right) = \frac{\omega}{2}\left(aa^+ + a^+a\right)}$$

Свободные поля в искривлённом пространстве-времени

$$\boxed{S=\int d^4x\sqrt{-g}\,\tfrac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi}$$

$$\boxed{\Box\varphi=0 \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\mu\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\partial_\nu\varphi\right)}$$ Уравнение Клейна-Гордона

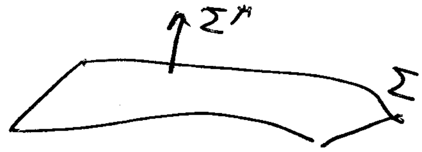
Квантуем: $$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=\sqrt{-g}\,g^{0\nu}\partial_\nu\varphi=\pi(x)$$



$$n_\mu=(n_0,0,0,0)$$

$$\boxed{[\varphi(x),\pi(x')]=i\delta^{(3)}(x-x')} \longleftarrow$$ Обычная δ-функция

Аналогия: Скобка Клейна-Гордона



$$\langle f,g\rangle=\int_\Sigma d\Sigma_\mu\, j^\mu = \int_\Sigma d\Sigma_\mu\, i\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\left(\bar f\overleftrightarrow{\partial_\nu} g\right)$$

$\neq \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\,dx^\nu\wedge dx^\rho\wedge dx^\lambda$ и!

$$\boxed{j^\mu=i\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\left(\bar f\overleftrightarrow{\partial_\nu} g\right)}$$

$$\partial_\mu j^\mu = i\left[\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\bar f\,\partial_\nu g\right)-\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\bar f\,g\right)\right]$$

$$= i\,\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu g\right)\bar f + i\,\cancel{\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\mu\bar f\,\partial_\nu g}$$

$$- i\,\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\bar f\right)g - i\,\cancel{\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\bar f\,\partial_\mu g}$$

$$= i(\Box g)\bar f - i(\Box\bar f)g = 0$$

Св-во 1. Скобка Клейна-Гордона не зависит от поверхности Σ.

$\Updownarrow$

$\boxed{\text{Не зависит от времени.}}$

Св-во 2 $\langle f, \bar{f} \rangle = \int \dots (f \overleftrightarrow{\partial_\nu} f) = 0$ $\qquad \boxed{\langle f, \bar{f} \rangle = 0}$

Св-во 3 $\overline{\langle f, g \rangle} = -i \int \dots (f \overleftrightarrow{\partial_\nu} \bar{g}) = \langle g, f \rangle =$

$= -\langle \bar{f}, \bar{g} \rangle$ $\qquad \boxed{\overline{\langle f, g \rangle} = g, f = -\langle \bar{f}, \bar{g} \rangle}$

Можно выбрать ортонормированный базис f_k

$$\boxed{\varphi = \sum_k \left(a_k f_k + a_k^+ \bar{f}_k \right)}$$

$\Updownarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} a_k &= \langle f_k, \varphi \rangle \\ a_k^+ &= -\langle \bar{f}_k, \varphi \rangle \end{aligned}}$$

Но это - слишком сложно! Можно работать с 1 волновым пакетом

$$\boxed{\begin{aligned} a(f) &= \langle f, \varphi \rangle \\ a^+(f) &= -\langle \bar{f}, \varphi \rangle \end{aligned}}$$

$\boxed{a^+(f) = -a(\bar{f})}$ $\mapsto$ Операторы рождения/уничтожения - условности

$$\boxed{\Pi^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}} \qquad \boxed{\partial_\mu(\Pi^{\mu\nu}\partial_\nu \phi) = 0}$$

$$\boxed{\Sigma_\lambda A^\lambda = 0} \qquad \boxed{\Pi^{0\nu}\partial_\nu \phi = \pi}$$

$$\Sigma_\lambda = (\Sigma_0, 0, 0, 0)$$

$$\Sigma_0 g^{00} \Sigma_0 = 1$$

$$\boxed{\Sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{g^{00}}}}$$

$$a(f) = \int d^3x\, i\, \Pi^{0\nu}\, \bar f \overleftrightarrow{\partial_\nu} \phi =$$

$$= \int d^3x\, i \left(\pi \bar f - \Pi^{0\nu}\partial_\nu \bar f\, \phi \right)$$

$$a^+(f) = -a(\bar f) = -i \int d^3x \left(\pi f - \Pi^{0\nu}\partial_\nu f\, \phi \right)$$

$$[a(f), a^+(g)] = \int d^3x\, d^3x' \,[\pi \bar f - \Pi^{0\nu}\partial_\nu \bar f\, \phi,$$

$$\pi' f' - \Pi^{0\lambda'}\partial_\lambda g'\, \phi'] =$$

$$= i\int d^3x\, \cancel{d^3x'} \,[\cancel{\delta(x-x')}\, \bar f\, \Pi^{0\lambda}\partial_\lambda g - \Pi^{0\nu}\partial_\nu \bar f\, g]$$

$$= i \int d^3x\, \Pi^{0\nu}(\bar f \overleftrightarrow{\partial_\nu} g) = \langle f, g\rangle$$

$$\boxed{[a(f), a^+(g)] = \langle f, g \rangle}$$

$$[a(f), a(g)] = -[a(f), a^+(\bar g)] =$$

$$= -\langle f, \bar g \rangle$$

$$\boxed{[a(f), a(g)] = -\langle f, \bar g\rangle}$$

$$\boxed{[a^+(f), a^+(g)] = +\langle \bar g, f\rangle} \boxed{= -\langle \bar f, g\rangle}$$

$\boxed{\langle f, f\rangle = 1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{[a(f), a^+(f)] = 1}$

$a(f)|\psi\rangle = 0$ ⟵ "Нет частиц с волновой ф-цией f"

$a^+_{(f)}|\psi\rangle \quad \dots \quad (a^+_{(f)})^n|\psi\rangle$ ⟵ n частиц с волновой ф-цией f

Для полного построения Гильбертова пр-ва нужно найти полный набор

$$\begin{cases} f_k \leftrightarrow a(f_k) = a_k \\ \bar f_k \leftrightarrow a^+(f_k) = -a(\bar f_k) = a_k^+ \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \langle f_k\, \bar f_{k'}\rangle &= 0 \\ \langle f_k\, f_{k'}\rangle &= \delta_{kk'} \end{aligned}}$$

⟷ Тогда [redacted] построим полный набор

$a_k|0\rangle = 0$ – Фоковский вакуум

Плоское пр-во

V – объём, периодические граничные условия

$\vec k = \frac{2\pi}{L}\vec n$

$\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$

$$\boxed{f_k = \frac{1}{\sqrt{2V\omega_k}}\, e^{-i\omega_k t + ikx}}$$

$$\langle f_k f_{k'}\rangle = i\int_V d^3x\, \frac{1}{\cancel{2V\omega_k}}\left(e^{+i\omega_k t - ikx}\, \overleftrightarrow{\partial}\, e^{-i\omega_k' t + ik'x}\right)(-i)(\omega_k' + \omega_k)$$

$$\cancel{i}\,\delta_{kk'} = \delta_{kk'}$$

$$\boxed{\phi = \sum_k \left[a_k f_k + a_k^+ \bar f_k\right]}$$ – Узнаём обычное представление оператора поля.

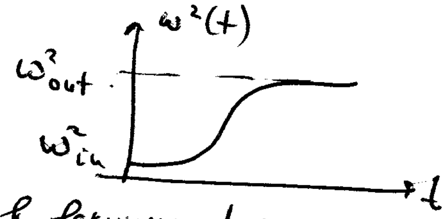
$\boxed{a_k = \langle f_k, \varphi\rangle}$

$\langle f_k, \bar f_{k'}\rangle = \int \dots \cancel{(\omega_k - \omega_{k'})} \to 0$ как только $k = k'$

$a_k^+|0\rangle$ – 1 бозон в состоянии с ВФ e^{ikx} с импульсом k.

Параметрическое возбуждение гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega^2(t)\, x = 0$$



$$\begin{cases} \text{Осциллятор в начальном состоянии – в вакууме } |0\rangle_{in} \\ \text{В каком состоянии он окажется?} \end{cases}$$

Введём 2 решения. Точных!

$$\begin{cases} f_{in}(t) \xrightarrow{t\to -\infty} \dfrac{e^{-i\omega_{in} t}}{\sqrt{2\omega_{in}}} \\ f_{out}(t) \xrightarrow{t\to +\infty} \dfrac{e^{-i\omega_{out} t}}{\sqrt{2\omega_{out}}} \end{cases}$$

Но линейно независимых решений 2!

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f_{out}(t) = \alpha\, f_{in}(t) + \beta\, \bar{f}_{in}(t)}$$ Коэффициенты Боголюбова

$$\langle f_{out}, f_{out}\rangle = 1 = \langle \alpha f_{in} + \beta \bar{f}_{in},\ \alpha f_{in} + \beta \bar{f}_{in}\rangle =$$

$$= |\alpha|^2 - |\beta|^2$$

$$\boxed{|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1}$$

$$a_{out} = \langle f_{out}, x\rangle = \langle \alpha f_{in} + \beta \bar{f}_{in}, x\rangle =$$

$$= \alpha^* a_{in} - \beta^* a_{in}^+$$

$$\boxed{a_{out} = \alpha^* a_{in} - \beta^* a_{in}^+}$$

$|0\rangle_{in}$: $\boxed{t \mapsto -\infty}$

f_{in} – естественный выбор a_{in}, a_{in}^+

$\boxed{t \mapsto +\infty}$ $\boxed{|0\rangle_{in} \mapsto |0\rangle_{in}}$

$\hat{x}(t)$ $\boxed{\text{эволюционировал}}$

${}_{in}\langle 0|\, N_{out}\, |0\rangle_{in}$ – Количество родившихся квантов.

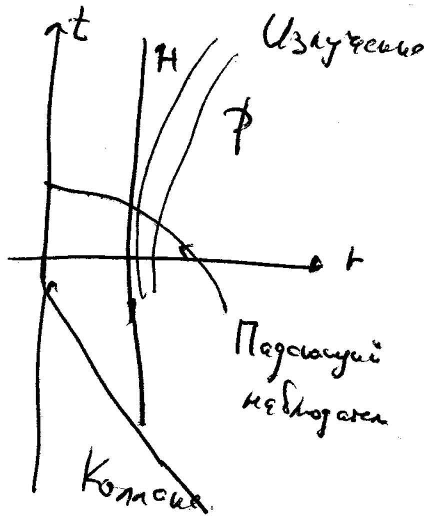
$${}_{in}\langle 0|\, a_{out}^+ a_{out} |0\rangle_{in} = {}_{in}\langle 0| \left(\cancel{\alpha a_{in}^+} - \beta a_{in} \right)\left(\cancel{\alpha^* a_{in}} - \beta^* a_{in}^+ \right) |0\rangle_{in}$$

$$= |\beta|^2$$

$\boxed{N_{out} = |\beta|^2}$ – Среднее количество родившихся частиц

Испарение чёрных дыр

Метрика стационарна ⇒ процесс похож на рождение e^+e^- пар в электрическом поле



$\boxed{\text{Зачем я расписала?}}$

$$\Box\phi = \partial_\mu(\underbrace{\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}}\partial_\nu \Phi) = 0$$

↳ Коэффициент не зависит явно от t

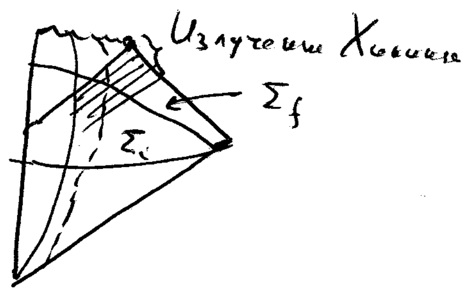
⇓

$$\partial_t \Box \phi = \Box\, \partial_t \phi \Rightarrow$$ Операторы коммутируют.

(i) Время Шварцшильда

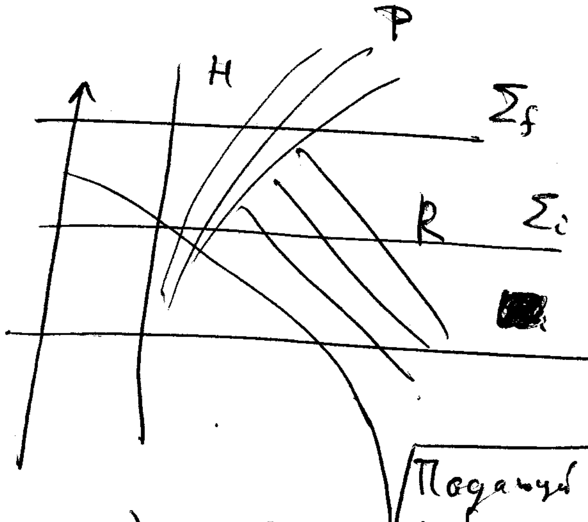
(ii) Время Крускала или время падающих наблюдателей.

Вопрос Пусть чёрная дыра сформирована в результате коллапса. Каково будет количество частиц в волновом пакете P?



$$\hat N(P) = a^+(P)a(P)$$

$$\boxed{a(P) = \langle P, \varphi\rangle_{\Sigma_f}}$$



По какому состоянию усреднить? В момент времени Σ_i мы знаем квантовое состояние. ⇒ Можно вычислить $a(P)$ при Σ_i

Падающий наблюдатель

~~Предисл.~~ Как выглядит горизонт?

Если мы перейдём в систему Крускела или Падающего наблюдателя,

то горизонт - световой конус, гравитационное поле не сильное

~~[illegible]~~ Больше ω $\Rightarrow$ для таких мод будто пр-в Минковского

$\boxed{\text{Предположение}}$ С точки зрения системы Крускела или падающую наблюдателя поле ϕ находится в вакууме при больших частотах

Пропагируем P назад по времени $\Rightarrow$ 2 части:

R - отражённая от г-зонта

T - прошедшая

$$\boxed{P(x,t) = R(x,t) + T(x,t)}$$

$$\boxed{a(P) = \langle P, \Phi \rangle = a(R) + a(T)}$$

$$\langle\psi| N(P) |\psi\rangle = \langle\psi| \left(a^+(R) + a^+(T)\right)\left(a(R) + a(T)\right) |\psi\rangle_{\Sigma_i}$$

Так как $\boxed{\Box\, \partial_t = \partial_t \Box}$, то $\boxed{P(x,t) = e^{-i\omega t} P(x)}$

$$\boxed{R = e^{-i\omega t} R(x)}$$

$$\boxed{T = e^{-i\omega t} T(x)}$$

Все имеют одинаковую частоту $\Rightarrow$ Не происходит перемешивания положит/отрицат. и отрицательных/частотных частей.

$\boxed{a(R) - \text{оператор уничтожения}}$ — Для R - точно асимптотический вакуум

$$\boxed{\langle\psi| N(P) |\psi\rangle = \langle\psi| a^+(T)\, a(T) |\psi\rangle}$$

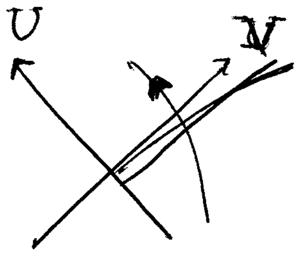
Почему мы интересуем большие частоты? Покраснение $\frac{\omega_f}{\omega_i} = \sqrt{1-\frac{2M}{r}}$

$$\boxed{\frac{\omega_f}{\omega_i} = \sqrt{1-\frac{2M}{r_i}}}$$

Если $\boxed{a(T)\,|\Psi\rangle = 0}$, то частица не производится

Вакуум Бульваре (Boulware vacuum)

Но P не имеет строго отрицательную частоту по отношению ко времени падающего наблюдателя!

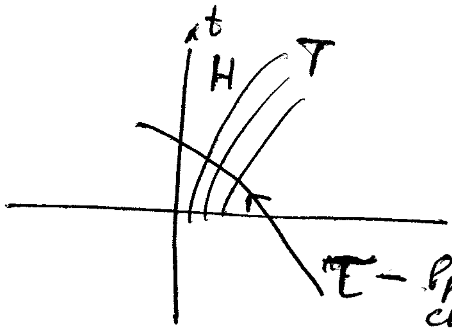


$$T = \frac{1}{2}(U+V) =$$

Вдали от горизонта белой дыры

$$= \frac{1}{2}\left[\cancel{-e^{-(t-r_*)/4M}} + e^{(t+r_*)/4M}\right]$$

Вдали от горизонта белой дыры $\boxed{T = e^{\frac{t}{4M}}}$ $1/2$



$$\frac{t-r_*}{4M} = \text{const}$$

τ — время свободно падающего наблюдателя

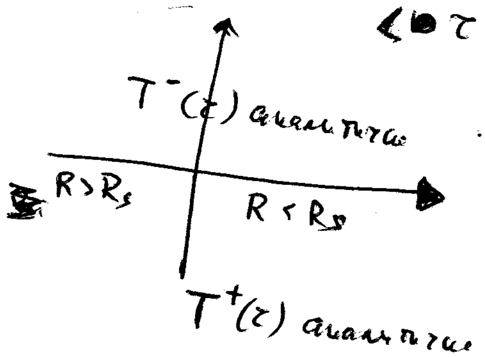
$$\boxed{T(\tau) = \begin{cases} T(\tau), & \tau < 0 \\ 0, & \tau > 0 \end{cases}}$$

Когда уже под горизонтом

Разложим $\boxed{T(\tau) = T^+ + T^-}$

Полож/ и отриц/ част. компонент по отношению ко времени τ

$\lessgtr \tau$



$$\boxed{T(\tau) = \int d\tau\, e^{-i\omega\tau}\, h(\omega)}$$

$$a(T) = a(T^+) + \underline{a(T^-)}$$

$$= a(T^+) - \underline{a^+(\bar{T}^-)}$$

В действительности это — оператор рождения

Высокочастотные моды в основном состоянии

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} a(T^+)|\psi\rangle &= 0 \\ a(\bar{T}^-)|\psi\rangle &= 0 \end{aligned}}$$

$$\langle\psi|N(P)|\psi\rangle = \langle\psi|a^+(T)\,a^-(T)|\psi\rangle =$$

$$= \langle\psi|\left(\cancel{a^+(T^+)} + a^+(\bar{T}^-)\right)\left(\cancel{a(T^+)} - a^+(\bar{T}^-)\right)|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|\,a(\bar{T}^-)\,a^+(\bar{T}^-)|\psi\rangle =$$

$$= \langle\bar{T}^-, \bar{T}^-\rangle \boxed{\langle\psi|\psi\rangle}$$

Считаем вакуум нормированным на единицу

$$= \langle\bar{T}^-, \bar{T}^-\rangle = -\langle T^-, T^-\rangle_{\Sigma_i}$$

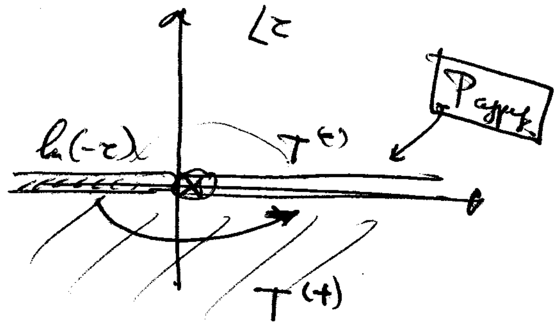
$$\boxed{\langle\psi|N(P)|\psi\rangle = -\langle T^-, T^-\rangle_{\Sigma_i}}$$

$\boxed{\text{Вычислим} \quad \langle T^-; T^- \rangle}$

$\boxed{\varkappa = \frac{1}{4M}}$ $\qquad$ $\boxed{t = 4M \ln(-\tau) + const}$

$$\Downarrow$$

$$T \propto \begin{cases} e^{-\frac{i\omega}{\varkappa}\ln(-\tau)}, & \tau < 0 \\ 0, & \tau > 0 \end{cases}$$



Положительно/частотная должна быть аналитична в нижней п/п

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} T^+ = e^{-\frac{i\omega}{\varkappa}(\ln(-\tau) - i\pi)}, & \tau > 0 \\ T^-(\tau) = e^{-\frac{i\omega}{\varkappa}(\ln(-\tau) + i\pi)}, & \tau > 0 \end{cases}$$

$\boxed{\tau > 0} \Rightarrow \quad T^+(\tau) = e^{-\frac{\pi\omega}{\varkappa}} e^{-\frac{i\omega}{\varkappa}\ln(+\tau)}$

$$T^-(\tau) = e^{+\frac{\pi\omega}{\varkappa}} e^{-\frac{i\omega}{\varkappa}\ln(+\tau)}$$

$$\widetilde{T} = \begin{cases} T(|\tau|), & \tau > 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases} \quad \longleftarrow \text{Под горизонтом}$$

$$\boxed{\begin{aligned} T^+ &= c_+\left(T + e^{-\frac{\pi\omega}{\varkappa}} \widetilde{T}\right) \\ T^- &= c_-\left(T + e^{\frac{\pi\omega}{\varkappa}} \widetilde{T}\right) \end{aligned}}$$

$$T^+ + T^- = \begin{cases} (c_+ + c_-)T, & \tau < 0 \\ c_+ e^{-\frac{\pi\omega}{\varkappa}} + c_- e^{\frac{\pi\omega}{\varkappa}}, & \tau > 0 \end{cases}$$

$$C_+ \cancel{e^{-\frac{\pi\omega}{\varkappa}}} = - C_- e^{2\pi\frac{\omega}{\varkappa}}$$

$$\boxed{C_+ = - C_- e^{\frac{2\pi\omega}{\varkappa}}}$$

$$C_+ + C_- = 1 = C_- \left(1 - e^{\frac{2\pi\omega}{\varkappa}}\right)$$

$$\boxed{C_- = \frac{1}{1 - e^{\frac{2\pi\omega}{\varkappa}}}}$$

$$\boxed{C_+ = + \frac{1}{-e^{-\frac{2\pi\omega}{\varkappa}} + 1}}$$

$\boxed{\langle T, \tilde{T} \rangle = 0}$ ⟵ Волновые пакеты не пересекаются

$\boxed{\langle \tilde{T}, \tilde{T} \rangle = - \langle T, T \rangle}$ ⟵

$$\parallel$$

$$\int d\Sigma_\mu \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \Big(\underbrace{\tilde{T}}_{T(-\tau)} \overleftrightarrow{\partial_\mu} \underbrace{\tilde{T}}_{T(-\tau)} \Big)$$

$\boxed{\partial_0 \mapsto -\partial_0}$ $\boxed{\tau \mapsto -\tau}$

Можно деформировать так чтоб

$\boxed{\text{Тогда просто знак меняется}}$ $\boxed{\Sigma_\mu g^{\mu\nu} \propto \delta^\nu_0}$

На самом деле, есть целая СК, где такие поверхности постоянны

$$\langle T^-, T^- \rangle =$$

$$= |C_-|^2 \langle T + e^{\frac{\pi\omega}{\varkappa}} \tilde{T},\ T + e^{\frac{\pi\omega}{\varkappa}} \tilde{T} \rangle =$$

$$= \frac{\langle T, T \rangle}{\left(1 - e^{\frac{2\pi\omega}{\varkappa}}\right)^2} \cancel{\left(1 - e^{\frac{2\pi\omega}{\varkappa}}\right)}$$

$$\boxed{\langle T^-, T^- \rangle = -\frac{\langle T, T \rangle}{e^{\frac{2\pi\omega}{\varkappa}} - 1}}$$

$$\boxed{\langle \psi | N(p) | \psi \rangle = \frac{\langle T, T \rangle}{e^{\frac{2\pi\omega}{\varkappa}} - 1}}$$

$$\boxed{n_\omega = \frac{e^{-\omega/T_H}}{1 - e^{-\omega/T_H}}} \qquad \boxed{T_H = \frac{\varkappa}{2\pi}}$$

Число заполнения бозонного поля

$\boxed{\Gamma = \langle T, T \rangle}$ – грейбоди фактор

Вероятность залететь в дыру.