$\boxed{\text{ОТО - 6}}$

Теорема о сингулярностях

Решение Шварцшильда сингулярно. Это - особенность? Сферическая симметрия?

Нет! В общем случае при разумных условиях возникают сингулярности! С ними надо жить!

(*) В окрестности сингулярности классическая ОТО не действует

~~[illegible]~~ G_N - параметр разложения ОТО

$$S' = \int d^4x \sqrt{-g}\left(\frac{1}{16\pi} R + C_1 R^2 + C_2 R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + C_3 R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}\right)$$

Размерные единицы:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\left(\frac{R}{M_p^2} + \frac{C R^2}{M_p^4} + \dots\right)$$

Обычно $\boxed{R \ll M_p^2}$ $\Rightarrow$ Все члены кроме 1-го пренебрежимо малы

Вблизи сингулярности "включаются" все члены разложения

$\Downarrow$

Нельзя понять физику без полной теории гравитации!

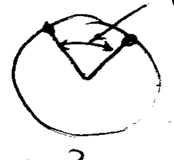
Как анализировать сингулярность? С помощью геодезических!

Сингулярность

$\left\{\begin{array}{l} (*)\ R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho} \to \infty \\ \text{или другое "патологическое" поведение метрики} \end{array}\right.$

Строгое определение??

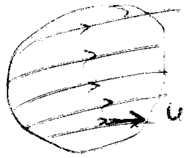
$R,\ R_{\mu\nu}R^{\mu\nu},\ R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}$ - сингулярны?

Нет!
1) Могут быть регулярны  Отождествить - Коническая сингулярность
2) Могут находиться на ∞ - За ∞ собственного времени до них дойти

def Пространство — сингулярно, если у него есть хотя бы одна неполная геодезическая, и она непродолжаема.

(Наподобие Крускала)

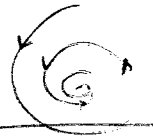
~~[illegible]~~ Конгруэнции ~~семейств~~ геодезических



$O \subset M$ **def** На O задана Конгруэнция ~~семейство~~ геодезических, если через каждую точку $p \in O$ проходит ровно 1 геодезическая.

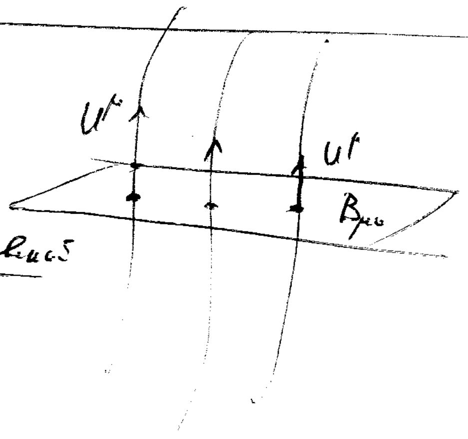
U^μ - Векторное поле на O

def Семейство геодезических гладкое, если поле U^μ - гладкое



— Негладкое семейство.

Времениподобные геодезические $\boxed{(U^\mu)^2 = 1}$



$$\boxed{B_{\mu\nu} = D_\nu U_\mu}$$ — Чисто пространственный

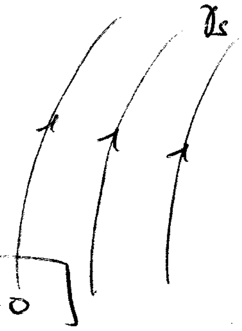
$$\boxed{U^\mu B_{\mu\nu} = 0 = U^\nu B_{\mu\nu}}$$

Нормировка

Ур-ние геодезической.

Уравнения отклонения геодезических

γ_s - однопараметрическое семейство геодезических.



$$\boxed{X^\mu(\tau, s)} \qquad U^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \ ; \quad \boxed{U^\nu D_\nu U^\mu = 0}$$

Скорость вдоль геодезической

$$\boxed{\chi^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial s}}$$ — Вектор отклонения

$$\boxed{(u^\mu)^2 = \epsilon} \boxed{= \pm 1}$$

$$\boxed{\tau' \Rightarrow \tau + a(s)} \quad$$ – Перепараметризуем геодезические

$$(u^\mu)' = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau'} = u^\mu$$

$$(X^\mu)' = \frac{\partial x^\mu}{\partial s}\Big|_{\tau'=const} = \frac{\partial x^\mu}{\partial s}\Big|_{\tau=const} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau'}\cdot\frac{da}{ds} = X^\mu + a' u^\mu$$

С помощью этого преобразования мы можем сделать $\boxed{(X u) = 0}$

Действительно: $(X' u') = (X u) + \underbrace{\epsilon a'}$

$\boxed{\text{Функция от } s}$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(Xu) = u^\nu D_\nu (Xu) = \underbrace{(u^\nu D_\nu u_\mu) X^\mu}_{\overset{\parallel}{0}} + \underbrace{u^\nu u^\mu D_\nu X_\mu} =$$

$$\boxed{\begin{matrix} X = \frac{\partial}{\partial s} \\ u = \frac{\partial}{\partial\tau} \end{matrix}}$$ – коммутируют

$$= u^\mu X^\nu D_\nu u_\mu = 0$$

$\Downarrow$

$\boxed{(X u) \text{ – функция только от } s} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{\epsilon}\int (X u)\, ds}$

$\Downarrow$

$$\boxed{(X' u) = 0}$$

$\boxed{v^\mu = u^\nu D_\nu X^\mu}$ – Скорость роста расстояния до ближайшей геодезической.

$\updownarrow$

$\boxed{\text{Относительная скорость близкой геодезической}}$

Относительное ускорение близкой геодезической

$$\boxed{a^\mu = U^\nu D_\nu v^\mu}$$

Выведем уравнение для a^μ — Тащим X^μ вперёд

$$a^\mu = U^\nu D_\nu \big(\underbrace{U^\lambda D_\lambda X^\mu}_{= X^\lambda D_\lambda U^\mu}\big) = U^\nu D_\nu \left(X^\lambda D_\lambda U^\mu\right) =$$

$$= \underbrace{\left(U^\nu D_\nu X^\lambda\right) D_\lambda U^\mu}_{= \left(X^\nu D_\nu U^\lambda\right) D_\lambda U^\mu} + \underbrace{U^\nu X^\lambda D_\nu D_\lambda U^\mu}_{U^\nu X^\lambda D_\lambda D_\nu U^\mu - U^\nu X^\lambda R_{\nu\lambda\varkappa}{}^\mu U^\varkappa}$$

$$=$$

$$= X^\nu D_\nu \big(U^\lambda D_\lambda U^\mu\big) - R_{\nu\lambda\varkappa}{}^\mu U^\nu X^\lambda U^\varkappa$$

$$\to 0$$

$$\boxed{a^\mu = - R_{\nu\lambda\varkappa}{}^\mu U^\nu X^\lambda U^\varkappa}$$ — Уравнение для ~~геодезических~~ отклонения геодезических

$\boxed{a^\mu = 0}$ для всех семейств геодезических

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{R_{\nu\lambda\varkappa}{}^\mu = 0}$$

$\Rightarrow$ С помощью отклонения геодезических можно изучать кривизну!

Назад к конгруэнции геодезических

~~[illegible]~~ $\boxed{x^\mu(\tau, s)}$ — 1-параметрическое семейство геодезических

$$X^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^\mu \quad \text{— Вектор отклонения}$$

$$U^\nu D_\nu X^\mu = \underline{X^\nu D_\nu U^\mu} = X^\nu B^\mu{}_\nu = B^\mu{}_\nu X^\nu$$

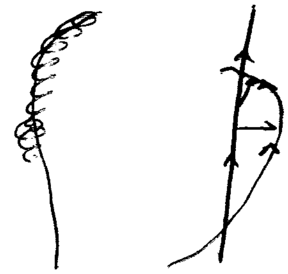
$$\boxed{U^\nu D_\nu X^\mu = B^\mu{}_\nu X^\nu}$$

$\Downarrow$

Физический смысл $\boxed{B^\mu{}_\nu}$ — даёт, насколько X^μ не параллельно перенесён.

Наблюдатель сидит на геодезической

$$\frac{dX^\mu}{d\tau} = B^\mu{}_\nu X^\nu$$



X^μ — ~~[illegible]~~ поворачивается и растягивается согласно $B^\mu{}_\nu$

Пространственная метрика

$$\boxed{h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - U_\mu U_\nu} \qquad \boxed{U^\mu h_{\mu\nu} = 0}$$

Оператор проекции на пр-во, ортогональное к U^μ.

θ — expansion	— расходимость
$\sigma_{\mu\nu}$ — shear	— сдвиг
$\omega_{\mu\nu}$ — twist	— поворот

$$\boxed{\theta = B^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = \mathrm{tr}\, B}$$

$$\boxed{\sigma_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(B_{\mu\nu} + B_{\nu\mu}) - \tfrac{1}{3}\theta h_{\mu\nu}}$$

Симметричная часть $B_{\mu\nu}$ без трейса

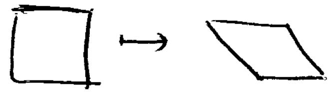
$$\boxed{\omega_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(B_{\mu\nu} - B_{\nu\mu})}$$

$$\sigma_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = \cancel{B_{\mu\nu}h^{\mu\nu}} - \tfrac{1}{3}\cdot 3\, \cancel{B^{\mu\nu}} h_{\mu\nu}$$

$$B_{\mu\nu} = \underbrace{\frac{1}{2}(B_{\mu\nu} - B_{\nu\mu})}_{\omega_{\mu\nu}} + \underbrace{\frac{1}{2}(B_{\mu\nu} + B_{\nu\mu}) - \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu}}_{\sigma_{\mu\nu}} + \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu}$$

$\omega_{\mu\nu}$ — Матрица поворота

$$\boxed{B_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu}}$$



$\sigma_{\mu\nu}, \omega_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}$ — Чисто пространственные.

$$u^\nu D_\nu X^\mu = B^\mu{}_\nu X^\nu = \underbrace{\omega^\mu{}_\nu X^\nu}_{\text{Поворот}} + \underbrace{\frac{1}{3}\theta X^\mu} + \underbrace{\sigma^\mu{}_\nu X^\nu}$$

Усреднённое расширение по всем направлениям.

Сдвиг	Если λ_i собств. значения
	$\sigma^\mu{}_\nu$	$\sum \lambda_i = 0$

Компоненты X умножаются на λ_i

Уравнение для отклонения геодезических приводит к ур-ию на θ, $\sigma_{\mu\nu}$, $\omega_{\mu\nu}$. Можно вывести заново:

$$u^\nu D_\nu B_{\mu\lambda} = u^\nu D_\nu D_\lambda u_\mu =$$

$$= \underbrace{u^\nu D_\lambda D_\nu u_\mu}_{\parallel} + u^\nu R_{\nu\lambda\mu\varkappa} u^\varkappa$$

$$\cancel{D_\lambda(u^\nu D_\nu u_\mu)} - D_\lambda u^\nu D_\nu u_\mu$$

$$= u^\nu u^\varkappa R_{\nu\lambda\mu\varkappa} - B^\nu{}_\lambda B_{\mu\nu}$$

$$U^\mu D_\mu h_{\alpha\beta} = U^\mu D_\mu (g_{\alpha\beta} - U_\alpha U_\beta) = 0$$

$\boxed{\times h_{\mu\alpha}} \Rightarrow$

$$U^\nu D_\nu (B_{\mu\alpha} h^{\mu\alpha}) = U^\nu D_\nu \theta = \frac{d\theta}{d\tau} =$$

$$= \underbrace{g^{\mu\alpha} U^\nu U^\varkappa R_{\nu\alpha\mu\varkappa}}_{= -R_{\nu\varkappa} U^\nu U^\varkappa} - B^\nu{}_\alpha B_{\mu\nu} h^{\alpha\mu}$$

Из-за антисимметрии

$$= - R_{\nu\varkappa} U^\nu U^\varkappa - h^{\alpha\mu}\left(\omega^\nu{}_\alpha + \sigma^\nu{}_\alpha + \tfrac{1}{3}\theta h^\nu{}_\alpha\right) \times \left(\omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \tfrac{1}{3}\theta h_{\mu\nu}\right)$$

$$\boxed{\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = 0}$$

$$\boxed{\sigma_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = 0}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{d\tau} = - R_{\nu\varkappa} U^\nu U^\varkappa + \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} - \tfrac{1}{3}\theta^2}$$

<u>Raychaudhuri</u> = Райчаудхури

$$\cancel{\tfrac{1}{2} U^\nu D_\nu (B_{\mu\alpha} + B_{\alpha\mu}) - \tfrac{1}{3} h^{\mu\alpha} U^\nu D_\nu B_{\mu\alpha} =}$$

$$\cancel{= U^\nu D_\nu \sigma_{\mu\alpha} =}$$

$$\cancel{= \tfrac{1}{2} U^\nu U^\varkappa R_{\nu\alpha\mu\varkappa} + \tfrac{1}{2} U^\nu U^\varkappa R_{\nu\mu\alpha\varkappa} - \tfrac{1}{3} U^\nu U^\varkappa R_{\nu\alpha\mu\varkappa} h^{\alpha\mu}}$$

$$\cancel{+ \tfrac{1}{2} B^\nu{}_\alpha B_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} B^\nu{}_\mu B_{\alpha\nu}}$$

$$R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 8\pi\left(T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda_\lambda\right)U^\mu U^\nu =$$

$$= 8\pi\left(\underbrace{T_{\mu\nu}U^\mu U^\nu}_{} + \frac{1}{2} T^\lambda_\lambda\right)$$

Временноподобные геодезические.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$R - 2R = 8\pi T$$

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(+8\pi T) = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Плотность энергии материи, измеренная наблюдателями вдоль геодезических.

$\boxed{T_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \geq 0}$ — $\forall$ временноподобных U^μ

$\boxed{\rho \geq 0}$ Слабое энергетическое условие

$\boxed{T_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \geq -\frac{1}{2} T}$ Сильное условие энергодоминантности $\forall$ временноподобных U^μ

Пусть $\boxed{T_{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu - p g_{\mu\nu}}$

Тогда $U^\mu U^\nu T_{\mu\nu} = \rho$

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = (\rho + p) - 4p = \rho - 3p$$

$\boxed{\rho \geq 0}$ Слабое условие энергодоминантности

$$\rho \geq -\frac{1}{2}(\rho - 3p)$$

$\Updownarrow$

$\frac{3}{2}\rho \geq -\frac{3}{2}p \iff \boxed{\rho \geq -p}$ Сильное условие энергодоминантности

$\Updownarrow$

$\boxed{\rho + p \geq 0}$

Пусть $T_{\mu\nu} = v^\mu v^\nu (p+\rho) - p g_{\mu\nu}$.

$\uparrow$

Времениподобный

$$T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = (vu)^2 (p+\rho) - p \geq 0 \quad \boxed{\forall u}$$

Система координат: $\boxed{\begin{aligned} v_\mu &= (1,0,0,0) \\ g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} \end{aligned}}$

$\underbrace{(uv)}_{u^0} \to \infty$ если $u \to$ светоподобный

$\Downarrow$

$$\boxed{p+\rho \geq 0}$$

$$(uv)_{min} = u^0_{min} = 1 \Rightarrow \underline{p+\rho-p \geq 0}$$

$\Downarrow$ $\boxed{\text{Поменять местами}}$

$$\boxed{\rho \geq 0}$$

$\Downarrow$

Слабое условие энергодоминантности: $\boxed{\rho \geq 0}$ и $\boxed{p+\rho \geq 0}$

$$T = p+\rho - 4p = \rho - 3p.$$

$$T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu - \tfrac{1}{2} T = (vu)^2 (p+\rho) - p - \tfrac{1}{2}(\rho - 3p)$$

$$\begin{cases} \text{max:} & p+\rho \geq 0 \\ \text{min:} & \rho - \tfrac{1}{2}(\rho - 3p) \geq 0 \Rightarrow \rho - p \geq 0 \end{cases}$$

$$\tfrac{1}{2}\rho + \tfrac{3}{2} p \geq 0$$

Сильное условие энергодоминантности: $\boxed{\begin{aligned} p+\rho &\geq 0 \\ \rho + 3p &\geq 0 \end{aligned}}$

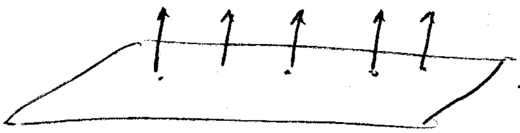
Ур-ние Райчаудхури

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\underbrace{R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}_{\geq 0} + \underbrace{\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}_{=0} - \underbrace{\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}_{\geq 0} - \theta^2/3$$

≥ 0 ← Квадрат пространственного тензора.

≥ 0 ← $\boxed{\text{Сильное условие энергодоминантности}}$

$= 0$ ← $\boxed{\text{если геодезические ортогональны некоторым гиперповерхностям}}$



Σ^0 ← $\boxed{\text{Например, если они были ортогональны некоторой поверхности в начальный момент времени, } \tau = 0 \text{ они ей ортогональны и всегда}}$

$\boxed{\text{Стартовали из покоя}}$

$Y^\mu, X^\mu \in \Sigma_\tau$

$\Downarrow$

$\boxed{(X, u) = 0}$

$\boxed{(Y, u) = 0}$

$$; \; Y^\nu X^\mu (B_{\mu\nu} - B_{\nu\mu}) = Y^\nu X^\mu (D_\nu u_\mu - D_\mu u_\nu) =$$

$$= \underbrace{Y^\nu X^\mu D_\nu u_\mu}_{=} - \underbrace{X^\mu D_\mu u_\nu Y^\nu}_{=} =$$

(ортогональность)

$$= -Y^\nu u^\mu D_\nu X^\mu + u_\nu D_\mu Y^\nu X^\mu =$$

$$= u^\mu (-Y^\nu D_\nu X^\mu + X^\nu D_\nu Y^\mu) =$$

$$= (u\, \underbrace{[X, Y]}_{\uparrow}) = 0$$

Тоже принадлежит Σ_τ.

$\Downarrow$

$\forall\ X, Y \in \Sigma_\tau \qquad X^\mu Y^\nu \omega_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_{\mu\nu} = 0}$

$$\frac{d\theta}{d\tau} \leq -\theta^2/3$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(1/\theta\right) \geq 1/3$$

$$\boxed{1/\theta \geq 1/3\,\tau + 1/\theta_0}$$

Пусть $\theta_0 \leq 0$ – Сходятся лучи $\Rightarrow$ $\boxed{1/\theta \text{ проходит через } 0}$

$\boxed{\tau_0 \leq -3/\theta_0}$ – ~~Лучи сходятся в точку~~ $\boxed{\theta \to -\infty}$

Лемма. Пусть $R_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \geq 0$ – Сильное энергетическое условие

$U^\mu \perp \Sigma_\tau$ $\leftarrow$ Геодезические ортогональны к поверхностям.

θ отрицательно хотя бы в одной точке $\theta_0 < 0$

$\Downarrow$

$\boxed{\theta \to -\infty}$ достигается ~~на интервале~~ $\boxed{\tau_0 \leq 3/\theta_0}$ за собственное время

Это, возможно, сингулярность конгруэнции геодезических,

а не сингулярность пространства-времени!

Но мы сейчас покажем, что эта теорема приводит

к заключению о сингулярности пр-ва-времени

Нулевые геодезические

X^μ $\qquad k^\mu$ — вектор вдоль геодезической, $\boxed{k_\mu k^\mu = 0}$

1) $$k^\nu D_\nu \left(k^\mu X_\mu\right) = \underbrace{\left(k^\nu D_\nu k^\mu\right)}_{0} X_\mu + k^\mu \underbrace{k^\nu D_\nu X_\mu}_{k^\mu X^\nu D_\nu k_\mu} = 0$$

$\Downarrow$

$k^\mu X_\mu$ постоянно вдоль геодезических; ~~[illegible]~~

Значит $\boxed{k^\mu = k^\mu_\parallel + k^\mu_\perp}$

$\boxed{k^\mu_\perp X_\mu = 0}$ $\longleftarrow$ Изменение неортогональной части неинтересно

2) $\boxed{X^\mu \mapsto X^\mu + k^\mu}$ — это просто сдвиг вдоль геодезической.

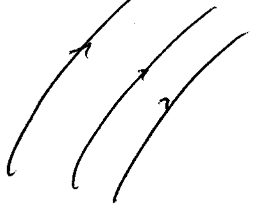
Независимые условия — калибровочная свобода.

$\Downarrow$

$\boxed{\text{2D класс векторов отклонения}}$

V_p — касательное пр-во в т. p.

$\hat V_p$ — 2-мерное касательное пр-во: $\{\xi,\ (\xi\cdot k) = 0,\ \underbrace{\xi = \xi + \alpha k}_{\text{Отождествление}}\}$



Конгруэнция; k_μ $\qquad D_\nu k_\mu = K_{\mu\nu}$

$B_{\mu\nu} = D_\nu k_\mu \qquad \boxed{\theta = h^{\mu\nu} K_{\mu\nu}}$

$$\underset{\substack{\parallel \\ k^\mu D_\nu k_\mu}}{k^\mu B_{\mu\nu}} = \underset{\substack{\parallel \\ D_\nu k_\mu k^\nu}}{B_{\mu\nu} k^\nu} = 0$$

$$\boxed{B_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\theta h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{d\lambda} = -\tfrac{1}{2}\theta^2 - \hat{\sigma}_{\mu\nu}\hat{\sigma}^{\mu\nu} + \hat{\omega}_{\mu\nu}\hat{\omega}^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu}$$

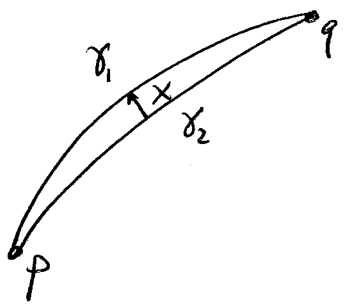
$$\boxed{T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0}$$

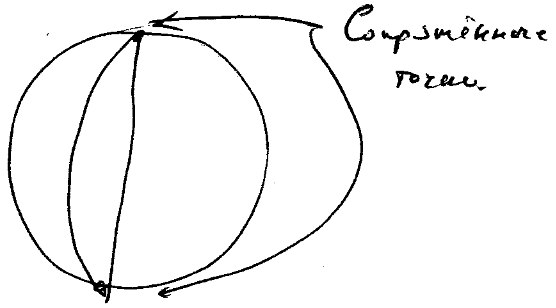
Сопряжённые точки

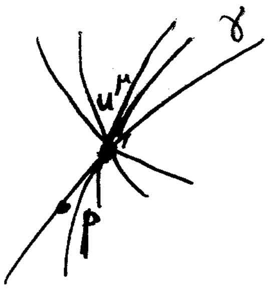
def $$\boxed{u^\mu D_\mu (u^\nu D_\nu X^\kappa) = - R_{\mu\nu\rho}{}^{\kappa} u^\mu X^\nu u^\rho}$$

Решения этого ур-ния - <u>поля Якоби</u> на геодезической γ.

def p, q - <u>сопряжённые</u> если $\exists$ поле Якоби $\eta \neq 0$, такое что $\eta(p) = \eta(q) = 0$







Рассмотрим <u>конгруэнцию</u> всех <u>времениподобных геодезических</u>, проходящих через p.

Поле Якоби X^μ, [redacted] $X^\mu(p) = 0$ - поле отклонения для этой конгруэнции.

th q сопряжена p <u>тогда и т. тогда когда</u> $\boxed{\theta(q) = -\infty}$

$\square$ Введём тетраду в т. p $\begin{pmatrix} e_\mu^0 = u^\mu \\ e_\mu^i \perp u^\mu \end{pmatrix}$

Распространим тетраду на всю кривую γ: $\boxed{u^\nu D_\nu e_\mu^a = 0}$

$$\boxed{\eta^a = e_\mu{}^a \eta^\mu}$$

$$u^\mu D_\mu (e_\mu^a \eta_a) = (u^\mu \partial_\mu \eta_a) e_\mu^a$$

$$u^\mu D_\mu\left(u^\nu D_\nu(\eta_a e^a_\lambda)\right) = u^\mu\left(\partial_\mu(u^\nu \partial_\nu \eta_a)\right) e^a_\lambda$$

$$= \frac{d^2\eta_a}{d\tau^2} e^a_\lambda .$$

$$\boxed{\frac{d^2\eta^a}{d\tau^2} = -R_{bcd}{}^{a}\, u^b \eta^c u^d}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\eta^a(\tau) = \cancel{\alpha^a{}_b(\tau)\,\eta^b(0)} + \beta^a{}_b(\tau)\frac{d\eta^b}{d\tau}(0)}$$

Линейная зависимость от начальных данных.

Начальное условие: $\eta(0)=0$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\beta^a{}_b}{d\tau^2} = -R_{cde}{}^{a}\, u^c \beta^d{}_b u^e \\ \beta^a{}_b(0) = \delta^a{}_b \\ \beta^a{}_b(0) = 0 \end{cases}$$

q – сопряжённая т. и т.т., когда $\exists\ \frac{d\eta^b}{d\tau}(0) \neq 0$: $\boxed{\eta^a(q)=0}$

$$\Updownarrow$$

Матрица $\beta^a{}_b(\tau)$ имеет нулевой вектор

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\det \beta^a{}_b = 0}$$

Давайте свяжем $\beta^a{}_b$ с $\boxed{B_{\mu\nu} = D_\nu u_\mu}$

$$\boxed{u^\nu D_\nu \eta^\mu = B^\mu{}_\nu \eta^\nu}$$

$$\frac{d\eta^a}{d\tau} = u^\nu D_\nu(\eta^\mu e_\mu^a) = u^\nu e_\mu^a D_\nu \eta^\mu = \underline{e_\mu^a\ B^\mu{}_\nu}\,\eta^\nu =$$

$$= B^a{}_b \eta^b$$

Определение β :⟹ $$\frac{d\eta^a}{d\tau} = \frac{d\beta^a{}_b}{d\tau}\cdot\frac{d\eta^b}{d\tau}(0)$$

$$\boxed{B^a{}_b\,\eta^b = \frac{d\beta^a{}_b}{d\tau}\frac{d\eta^b}{d\tau}(0)}$$

$$\eta^b \to \beta^b{}_c\frac{d\eta^c}{d\tau}(0)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{B^a{}_b\,\beta^b{}_c = \frac{d\beta^a{}_c}{d\tau}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\frac{d\beta}{d\tau} = B\beta}$$ В матричных обозначениях

$$\boxed{B = \beta^{-1}\frac{d\beta}{d\tau}}$$

$$\theta = \operatorname{tr} B = \operatorname{tr}\left(\beta^{-1}\frac{d\beta}{d\tau}\right) =$$

$$\frac{d}{d\tau}\det\beta = \frac{d}{d\tau}e^{\operatorname{tr}\ln\beta} = e^{\operatorname{tr}\ln\beta}\operatorname{tr}\left(\frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{d\tau}\right) = \det\beta\cdot\operatorname{tr}\left(\frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{d\tau}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\theta = \frac{1}{\det\beta}\underbrace{\frac{d}{d\tau}\det\beta} = \frac{d}{d\tau}\left|\ln\det\beta\right|}$$

$$\boxed{\frac{d\det\beta}{d\tau} \neq \infty}$$ ⟵ Потому что всё конечно, уравнение линейно.

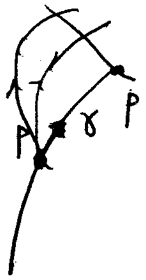
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\theta = -\infty \text{ тогда и т. тогда, когда } \det\beta = 0}$$

$$\boxed{\theta = -\infty}$$ – Значит сопряжённой точки

$$\boxed{\ln|x| \mapsto -\infty \text{ при } |x| \mapsto 0}$$

Th Пусть $R_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \geq 0$ $\forall$ времениподобных U^μ



γ - времениподобная геодезическая, $p \in \gamma$.

Пусть ~~Пусть~~ Семейство времениподобных геодезических, исходящих из p, имеет $\theta_0 < 0$ при некотором $p' \in \gamma$

Тогда $\exists$ сопряжённая точка $q \in \gamma$, которая отстоит от p' на $\boxed{\tau_{qp'} \leq \frac{3}{|\theta_0|}}$

$\boxed{\text{Геодезические должны быть ортогональны к гиперповерхности}}$

[illegible]

$$\begin{cases} R_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \geq 0 \\ R_{\mu\nu} U^\mu U^\nu > 0 \end{cases}$$

в точке r - достаточно далеко от p

либо $\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} > 0$

$\Downarrow$

$$\boxed{\frac{d\theta}{d\tau} \geq -\frac{1}{3}\theta^2 + R_{ab} U^a U^b}$$

[illegible] $\boxed{\theta_0 > 0} \Rightarrow \boxed{\theta \mapsto 0 \text{ при } \tau \mapsto \infty}$

Но $\frac{d\theta}{d\tau} = -\overbrace{\frac{1}{3}\theta^2}^{\text{Мало}} - R_{ab} U^a U^b - \sigma_{ab}\sigma^{ab}$

$\Downarrow$

$$\boxed{\frac{d\theta}{d\tau} \text{ сразу станет отрицательным}}$$

[illegible] Можно показать, что ~~для~~ для этого достаточно $\boxed{R_{\mu\nu\rho\lambda} U^\nu U_\lambda \neq 0}$ хотя бы в одной точке.

$\boxed{\text{Д/З}}$ Показать, что если $\boxed{R_{\mu\nu\rho\lambda} U^\nu U_\lambda \neq 0}$, то возникает тензор $\sigma_{\mu\nu}$

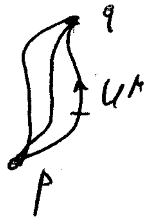
def° Пространство-время удовлетворяет <u>общему времениподобному условию</u> если $\forall$ γ-геодезической $\exists$ точка, в которой

$$\boxed{R_{\mu\nu\rho\lambda}u^\nu u^\lambda \neq 0}$$

---

th В пр-ве, удовлетворяющем общему времениподобному условию и $R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0$, у каждой ~~геодезической~~ полной есть хотя бы 2 сопряжённые точки

Экстремальные свойства кривых



$\lambda_\alpha(t)$ — гладкие времениподобные кривые.

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_\alpha(a) &= p\\ \lambda_\alpha(b) &= q\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}u^\mu &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\mu\\ X^\mu &= \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^\mu\end{aligned}}$$

$$\boxed{X^\mu(p) = X^\mu(q) = 0} \qquad \boxed{[X\,u] = 0}$$

$$\tau(\alpha) = \int \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = \int \underbrace{\sqrt{u^\mu u_\mu}}_{f(t)}\, dt$$

$$\frac{dt}{d\alpha} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha} dt = \int_a^b X^\mu D_\mu \sqrt{u^\nu u_\nu}\, dt =$$

$$= \int_a^b \frac{1}{f} \underbrace{\left(X^\mu D_\mu u^\nu\right)}_{u^\mu D_\mu X^\nu} u_\nu\, dt =$$

$$= \int_a^b \frac{1}{f} u^\mu u^\nu D_\mu X_\nu\, dt =$$

$$= \int_a^b \Big[\underbrace{u^\mu D_\mu\left(\frac{u^\nu X_\nu}{f}\right)} - u^\mu D_\mu\left(\frac{u^\nu}{f}\right) X_\nu\Big] dt$$

$$\int \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^\nu X_\nu}{f}\right) = \frac{u^\nu X_\nu}{f}\Big|_a^b = 0 \quad \text{т.к. } X(a) = X(b) = 0$$

$$\boxed{\frac{d\tau}{d\alpha} = -\int_a^b u^\mu D_\mu \left(\frac{u^\nu}{f}\right) X_\nu \, dt}$$

$$\frac{d^2\tau}{d\alpha^2} = -\int_a^b X^\lambda D_\lambda \left(u^\mu D_\mu \left(\frac{u^\nu}{f}\right) X_\nu\right) dt$$

$$\frac{d^2\tau}{d\alpha^2}\Big|_{\text{геодезические}} = -\int_a^b \cancel{(X^\lambda D_\lambda X_\nu)\, u^\mu D_\mu \left(\frac{u^\nu}{f}\right)}$$

$$-\int_a^b \underbrace{X^\lambda (D_\lambda u^\mu)}_{u^\lambda D_\lambda X^\mu}\left(D_\mu \frac{u^\nu}{f}\right) X_\nu \, dt$$

$$-\int_a^b \underbrace{X^\lambda \left(D_\lambda D_\mu \frac{u^\nu}{f}\right) X_\nu u^\mu}$$

$$= -\int_a^b (u^\lambda D_\lambda X^\mu)\left(D_\mu \frac{u^\nu}{f}\right) X_\nu \, dt +$$

$$+ \int_a^b dt \; X^\lambda R_{\lambda\mu\rho}{}^{\nu} \frac{u^\rho}{f} X_\nu u^\mu$$

$$- \int_a^b dt \; X^\mu \left(D_\lambda D_\mu \frac{u^\nu}{f}\right) X_\nu u^\lambda$$

$$= \int_a^b dt \left(-u^\lambda \left(D_\lambda \left(\boxed{X^\mu D_\mu \frac{u^\nu}{f}}\right)\right) X_\nu + u^\mu X^\lambda X^\nu \frac{u^\rho}{f} R_{\lambda\mu\rho\nu}\right)$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{-\frac{X^\mu D_\mu f \, u^\nu}{f^2} + \frac{X^\mu D_\mu u^\nu}{f}}$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{-\frac{1}{f^3}\underbrace{(X^\mu D_\mu u^\lambda)}_{u^\mu D_\mu X^\lambda} u_\lambda u^\nu + \frac{u^\mu D_\mu X^\nu}{f}}$$

Уравнения геодезической!

$$\parallel$$

$$-\frac{1}{f^3} u^\mu D_\mu (X^\lambda u_\lambda) u^\nu + \frac{u_\mu D^\mu X^\nu}{f}$$

Пусть $f=1$ вдоль геодезической. Тогда

$$\frac{d^2\tau}{d\alpha^2} = \int_a^b dt \Big(+ u^\lambda D_\lambda \big(\cancel{u^\mu u^\nu D_\mu (X^\lambda u_\lambda)} \big)^0 X_\nu - u^\lambda X_\nu D_\lambda \left(u^\mu D_\mu X^\nu \right) + u^\mu X^\lambda X^\nu u^\rho R_{\lambda\mu\rho\nu} \Big)$$

$\boxed{X^\mu u_\mu = 0}$ вдоль геодезической!

$\Downarrow$

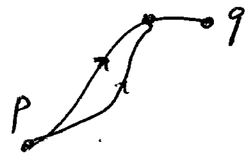
$$\frac{d^2\tau}{d\alpha^2} = \int_a^b dt\, X^\nu \Big(\underbrace{- u^\lambda D_\lambda \left(u^\mu D_\mu X^\nu \right) + u^\mu X^\lambda u^\rho R_{\lambda\mu\rho\nu}}_{\left(-a^\nu + R_{\mu\lambda\rho}{}^{\nu} u^\mu X^\lambda u^\rho\right)} \Big)$$

$\forall p\ \exists$ кривая max длины это — прямая

Прямо уравнение

$$\boxed{\frac{d^2\tau}{d\alpha^2} = \int_a^b dt\, X^\nu \left(-a^\nu + R_{\mu\lambda\rho}{}^{\nu} u^\mu X^\lambda u^\rho \right)} = \int_a^b dt\, X^\nu (OX)_\nu$$

th Пусть γ — гладкая кривая между p и q



Тогда необходимым и достаточным условием того, что γ максимизирует собственное время между p и q, является то, что γ — геодезическая без сопряжённых точек к p между p и q.

Д-во. Если не геодезическая $\Rightarrow \frac{d\tau}{d\alpha} > 0$ или < 0

$\Downarrow$

τ не максимально

Если есть сопряжённая точка, то $\exists X_0$: $\boxed{\begin{array}{l} OX_0 = 0 \\ X_0(p) = X_0(r) = 0 \end{array}}$

$$\boxed{X^\mu = \begin{cases} X^{\circ\mu} & \text{между } p \text{ и } r \\ 0 & \text{дальше} \end{cases}}$$ — Нет сдвигов 2 порядка

Сдвиги 3 порядка: $\propto \alpha^3$ $\Rightarrow$ $\exists$ такие сдвиги, для которых $\boxed{\frac{d^2\tau}{d\alpha^2} > 0}$

$\boxed{\text{Не максимум}} \mapsto$

$$\boxed{X^\mu_\nu = (A)^\mu{}_\nu\, Y^\nu}$$

$$\boxed{OA = 0}$$

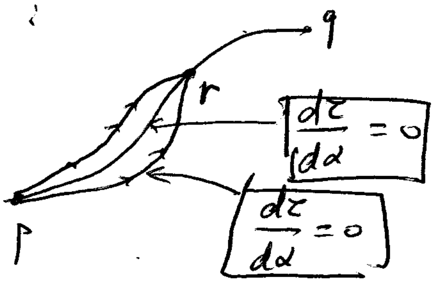
$$\frac{d^2\tau}{d\alpha^2} = \int_a^b dt\, X^\nu A_{\nu\mu} (OY)^\mu =$$

$$= \int_a^b dt\, \underbrace{Y^T A^2\, O Y}_{\text{Матричный вид}} = \int_a^b dt\, Y^T AOAY$$ — Не будем доказывать

ч.т.д.

Простое графическое д-во:

Если r — сопряжённая точка



$\Downarrow$

$\exists$ геодезическая, которая идёт из p в q и $\boxed{\text{ещё одна}}\boxed{\text{почти-}}$

$$\boxed{x^\mu \mapsto x^\mu + X^\mu \alpha}$$

Почти $\Leftrightarrow$ Ур-ние геодезической соблюдено с точностью $O(\alpha^2)$

$\Downarrow$

$\boxed{\frac{d\tau}{d\alpha} \simeq O(\alpha^2)}$ вблизи $\alpha = 0$

$\Downarrow$

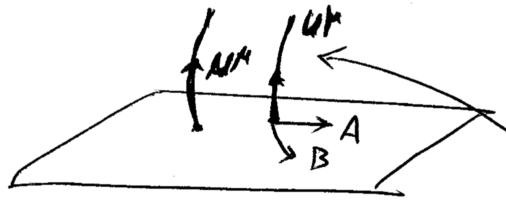
$\boxed{\frac{d^2\tau}{d\alpha^2} = 0}$ $\Rightarrow$ Есть отношение, для которого $\frac{d^2\tau}{d\alpha^2} = 0$

$\Downarrow$

Члены 3-го порядка $\boxed{\frac{d^3\tau}{d\alpha^3}}$ — $\boxed{\text{Не полож/отр}}$

Обратное доказывать не будем

Пусть есть пространственноподобная поверхность Σ



$$K_{\mu\nu} \overset{\nabla}{=} D_\nu U^\mu$$ — Внешняя кривизна

Геодезические времениподобные

$$U^\mu K_{\mu\nu} = K_{\mu\nu} U^\nu = 0$$

$$U^\mu D_\nu U_\mu \qquad D_\nu U^\mu U^\nu$$

$$\boxed{K_{\mu\nu} = -B_{\mu\nu}}$$

U^μ ортогонально к поверхности $\Longrightarrow$ $\boxed{K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}}$

$$A^\mu (K_{\mu\nu} - K_{\nu\mu}) B^\nu = A^\mu \underbrace{B^\nu D_\nu U_\mu} - \underbrace{A^\mu B^\nu D_\mu U_\nu} =$$

$$\boxed{[A, u] = [B, u] = 0}$$

$$- B^\nu (D_\nu A^\mu) U_\mu \quad (\text{ортогональны}) \quad + A^\mu (D_\mu B^\nu) U_\nu$$

$$= U^\mu \left(- B^\nu D_\nu A_\mu + A^\nu D_\nu B_\mu \right) = \left(U^\mu [A, B] \right) = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}}$$

$$K_{\mu\nu} \overset{\nabla}{=} \frac{1}{2} \mathcal{L}_u g_{\mu\nu} \overset{\nabla}{=} \frac{1}{2} (\nabla_\mu U_\nu + \nabla_\nu U_\mu) =$$

$$= -\frac{1}{2} \mathcal{L}_u (g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu) = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_u h_{\mu\nu}$$

Метрика на поверхностях, ортогональных к конгруэнции

$\Downarrow \nabla$

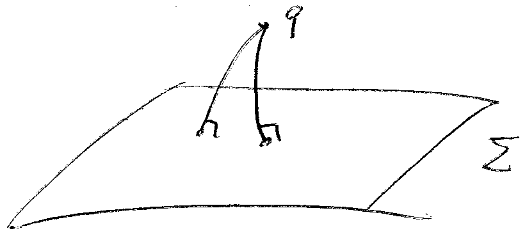
$K_{\mu\nu}$ меряет, как меняется $h_{\mu\nu}$ при движении вдоль геодезической

$$\boxed{K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_u h_{\mu\nu}}$$

Гауссовы нормальные координаты

$$\boxed{u^\mu = (1,0,0,0)} \Rightarrow \boxed{K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t}}$$

$$\boxed{K = + h^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = - h^{\mu\nu} D_\nu u_\mu = -\theta}$$



q — сопряжена к поверхности Σ

$\Updownarrow$

$\exists$ геодезическая γ и поле Якоби X^μ, такое что $\boxed{\begin{matrix} X^\mu(q) = 0 \\ X^\mu|_\Sigma \neq 0 \end{matrix}}$

Th $\theta(q) = -\infty$

Д Гауссовы нормальные координаты.

$$\boxed{ds^2 = d\tau^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j}$$

$\boxed{X^i}$ — ортогональны к геодезическим вектора отклонения

$$\boxed{e^i_\mu|_\Sigma = \delta^i_\mu}$$

$$\boxed{X^i|_\Sigma = 0} \qquad \boxed{u^\mu D_\mu X|_\Sigma = 0}$$

$$u^\mu D_\mu X^\nu = X^\mu D_\mu u^\nu = X^i D_i u^\nu = X^i \Gamma^\nu_{i0} u^0$$

$\boxed{\nu = j}$

$$\frac{1}{2}\gamma^{jk}(\partial_i \gamma_{k0} + \partial_0 \gamma_{ik} - \partial_k \gamma_{i0})$$

$$\boxed{X^\mu u_\mu = 0} \Rightarrow \boxed{X^0 = 0}$$

$$X^\mu e^i_\mu = \delta^i_\mu = X^i$$

$$\boxed{U^\mu D_\mu X^\nu = -B^\nu{}_\alpha X^\alpha}$$

$$\boxed{B_{\nu\alpha} = D_\alpha U_\nu}$$ — Полностью пространственный

Симметричные

$$\boxed{\frac{dX^a}{d\tau} = B^a{}_b X^b}\Big|_\Sigma$$ ← Задача

$$\boxed{\frac{d^2 X^a}{d\tau^2} = -R_{bcd}{}^a U^b X^c U^d}$$

$$\boxed{X^a(\tau) = \alpha^a{}_b(\tau) X^b(0)}$$ ← Только 1 нечетное условие

$$\boxed{\alpha^a{}_b(0) = \delta^a_b \qquad \frac{d\alpha^a{}_b}{d\tau}(0) = B^a{}_b\big|_\Sigma}$$ ← Решает уравнение

$$\boxed{\frac{d\alpha^a{}_b}{d\tau} = B^a{}_c \alpha^c{}_b}$$

$$\boxed{\frac{d\alpha^a{}_e}{d\tau} = \dots \alpha^c{}_e}$$

$X^a(\tau) = 0 \implies \alpha^a{}_b(\tau)$ имеет нулевой вектор

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\det \alpha^a{}_b(\tau) = 0}$$

$$\theta = +B^\mu{}_\nu h^{\mu\nu} = B^\mu{}_\nu g^{\mu\nu}$$

$$\frac{dX^a}{d\tau}\Big|_\Sigma = \underbrace{\frac{d\alpha^a{}_b}{d\tau}(\tau) X^b \qquad B^a{}_b \alpha^b{}_c(\tau) X^c(0)}$$

$$\boxed{B(\tau) = \alpha^{-1}(\tau) \frac{d\alpha}{d\tau}(\tau)} \qquad \boxed{\frac{d\alpha}{d\tau} = B \cdot \alpha}$$

$$\theta = \operatorname{tr} B = \operatorname{tr} \alpha^{-1} \frac{d\alpha}{d\tau}\Big|_0 = \frac{1}{\det\alpha} \frac{d}{d\tau} \det\alpha$$

$\boxed{\det \alpha = 0} \Leftrightarrow \boxed{\theta = -\infty}$ ok

---

$\Downarrow$

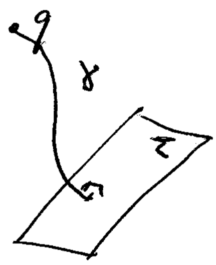
Th. Пусть $R_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \geq 0 \quad \forall\, U^\mu$ — времениподобных

Σ: $\boxed{K = -\theta > 0}$ — поверхность, в одной из точек которой $\theta < 0$

$\Downarrow$

$\tau = 3/|K| \quad \exists$ сопряжённая точка к поверхности

Th.



γ — кривая, ортогональная к Σ и проходящая через q

$\Downarrow$

Необходимое и достаточное условие того, что γ максимизирует собственное время, является то, что γ — геодезическая и нет сопряжённых к Σ точек между γ и Σ

$\boxed{\exists \text{ кривых максимальной длины}}$

def M – глобально-гиперболическое пр-во-время

$\Downarrow$

Между любыми 2-мя (времениподоб. точками) точками ∃ кривая максимальной длины (максимальное собственного времени) и это кривая – <u>геодезическая</u>

$$\boxed{\tau[\gamma] = \int_p^q \sqrt{u^\mu u_\mu}\, d\tau}$$

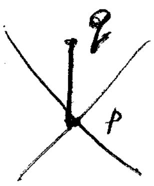
□ <u>По индукции</u>. Докажем для длины L.

(Физический уровень достоверности)

$\boxed{R \text{ – радиус кривизны пр-ва}}$ – $\boxed{\text{Нигде не обращается в } \infty}$

$$\boxed{l = \left(L/N\right) \ll R} \Rightarrow \text{Всё как в пр-ве Минковского}$$

Для таких кривых



Геодезическая – почти прямая линия, она даёт максимальное собств. время.

Всё гладко, собств. время ограничено сверху

$$\sqrt{dt^2 - dl^2} \le dt$$

<u>СО, в которой</u> p – в точности в будущем q

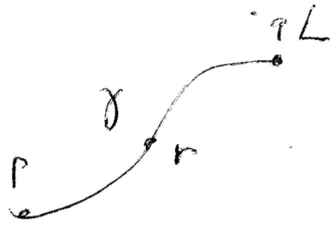
$$\boxed{\begin{aligned} t_p &= t_q + \tau \\ X_p &= X_q \end{aligned}}$$

$\boxed{\tau = t_p - t_q}$ – для такой СО ⇒ это максимум.

<u>Действительно</u> $\tau = \int \sqrt{dt^2 - dl^2} \le \int dt = t_q - t_p$

Теперь – по индукции $\boxed{\text{Длина} < L}$ – Доказали

$\Downarrow$



От противного

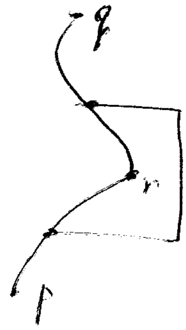
γ — длины больше, чем геодезическая между p и q

$\boxed{r \in \gamma}$ (pr), (rq) — длины, для которой уже всё доказано.

$\Downarrow$

$\left.\begin{matrix}(pr)\\(rq)\end{matrix}\right\}$ — (увеличим их длину и получим геодезические)

Обрезаем угол



Значит $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Был геодезическая}}$ если увеличим длину

$\Downarrow$

$\exists \gamma$ $\exists$ геодезическая с большей длиной* $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Всё доказано}}$

---

th Пусть M — глобально гиперболично, Σ — гладкая поверхность.
Тогда $\exists$ кривая максимальной длины между точкой q и Σ, причём, эта кривая — геодезическая

Теорема о сингулярностях

$$\boxed{\text{Сингулярность} \Longleftrightarrow \text{Геодезическая неполнота}}$$

Th Пусть M — глобально гиперболично

$R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0 \quad \forall\, u^\mu$ — времениподобных

Σ — гладкая поверхность Коши, для которой

$\boxed{K = -\theta \leq -C < 0} \Leftrightarrow$ Расширяющаяся Вселенная

во всех точках.

Константа

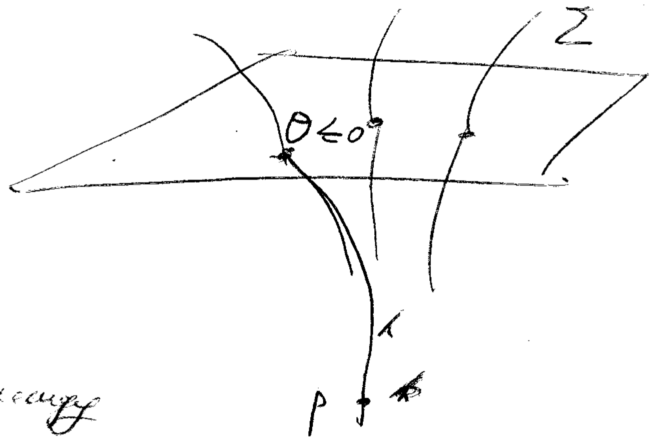
$\Downarrow$

Ни одна кривая в прошлое не может иметь длины больше $3/|C|$

$\square$ От противного

λ — длина больше $3/|C|$

p — точка на λ.



$\exists$ кривая максимальной длины между p и Σ $\rightarrow$ Геодезическая $\Longrightarrow$ $\exists$ сопряжённая точка на геодезической

$\Downarrow$

Геодезическая не максимальной длины

$\Downarrow$

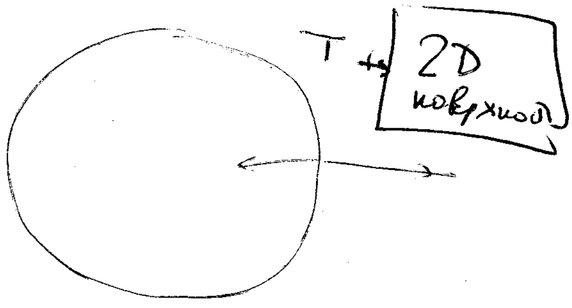
Противоречие

ч.т.д.

Теорема - коллапс

Trapped surface

2 семейства ~~[illegible]~~ светоподобных геодезических — ~~[illegible]~~ направленных внутрь и наружу.



$\theta < 0$ для светоподобных геодезических, направленных внутрь И наружу $\Rightarrow$ T — поверхность захвата (trapped surface)

Компактная поверхность | 2D, пространственноподобная

Th

Σ — некомпактная поверхность Коши

M — глобально/гиперболичное пр-во-время.

$R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$ для любого $k^2=0$

Пусть $\exists$ поверхность захвата $T \subseteq M$

$$\boxed{\theta_0 < 0 \equiv \max_T \theta}$$

Хотя бы ... Нужна геодезическая, ортогональная T, + направленная в будущее имеет аффинную длину $\leq \frac{2}{\theta_0}$

Без доказательства

~~Пусть ... имеет длину~~ $> \frac{2}{|\theta_0|}$

$f_+ : T \times [0, 2/|\theta_0|] \to M$

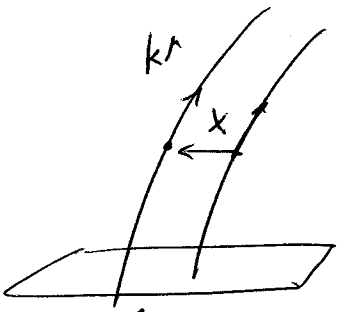
$f_- : T \times [0, 2/|\theta_0|] \to M$

~~Ко всем точкам пробегает аффинный параметр~~

$A = f_+\{T \times [0, 2/|\theta_0|]\} \cup f_-\{T \times [0, 2/|\theta_0|]\}$ —

~~общее [illegible]~~

Светоподобные геодезические



$$k^\mu k_\mu = 0$$

$X \mapsto X + k$ — "Калибровочная свобода"
Сдвиг X вдоль геодезической

$$k^\mu D_\mu (kX) = (k^\mu D_\mu k^\nu) \cancel{X}_\nu + \underbrace{k^\mu k^\nu D_\mu X_\nu}_{k^\nu X^\mu D_\mu k_\nu} = 0$$

$\boxed{\text{Пусть ортогональны к гиперповерхности}}$

$\Downarrow$

$$\boxed{kX = \text{const вдоль геодезической}}$$

$\Downarrow$

$\boxed{X = X_\parallel + X_\perp} \leftarrow$ Нетривиальный вектор отклонения.

Не меняется тривиальным сдвигом

$\boxed{h_{\mu\nu} \to h^{(\parallel)}_{\mu\nu} + h^{(\perp)}_{\mu\nu}}$ $\underline{k^\mu h^\perp_{\mu\nu} = 0}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{Метрика на пространстве } V^\perp \text{ вырождена}}$

$\boxed{\text{Не единственная операция. С точностью до прибавления } k_\mu}$

Ничего страшного! У нас есть k^μ отождествляем вектора

$$A \quad \text{и} \quad A + \alpha k^\mu$$

$\Downarrow$

Получаем пространство $\hat{V}$

Операция $\hat{A}$ $\longleftrightarrow$ (i) Выделим $A^\perp \perp k$
(ii) Отождествим $A^\perp$ и $A^\perp + \alpha k^\mu$

$\boxed{B_{\mu\nu} = D_\nu k_\mu}$ $\boxed{\hat{B}_{\mu\nu}} \leftarrow$ просто ~~...~~ отождествим члены $\propto k$

$\Downarrow$

$$\boxed{k^\mu B_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} k^\nu = 0}$$

$$\boxed{\hat B_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\theta\, \hat h_{\mu\nu} + \hat\sigma_{\mu\nu} + \hat\omega_{\mu\nu}}$$

$$k^\nu D_\nu B_{\mu\lambda} = k^\nu D_\nu D_\lambda k_\mu =$$

$$= k^\nu R_{\nu\lambda\mu}{}^{\rho} k_\rho + \underbrace{k^\nu D_\lambda \cancel{D_\nu} k_\mu}_{\cancel{D_\lambda (k^\nu D_\nu k_\mu)} \to 0 \;-\; D_\lambda k^\nu D_\nu k_\mu}$$

$$= k^\nu k^\rho R_{\nu\lambda\mu\rho} - B_{\lambda\nu} B^\nu{}_\mu$$

$$\boxed{k^\nu D_\nu B_{\mu\lambda} = k^\nu k^\rho R_{\nu\lambda\mu\rho} - B_{\lambda\nu} B^\nu{}_\mu}$$

$$k^\nu D_\nu B_{\mu\lambda} = k^\nu D_\nu (\hat B_{\mu\lambda} - C_\mu k_\lambda - \tilde C_\lambda k_\mu - a k_\mu k_\lambda)$$

$$B_{\lambda\nu} B^\nu{}_\mu = (\hat B_{\lambda\nu} + C_\lambda k_\nu + \tilde C_\nu k_\lambda + a k_\nu k_\lambda)(\hat B^\nu{}_\mu + C^\nu k_\mu + \tilde C_\mu k^\nu + a k^\nu k_\mu) =$$

$$= \hat B_{\lambda\nu} \hat B^\nu{}_\mu + \underbrace{\hat B_{\lambda\nu} C^\nu k_\mu + C_\lambda k_\nu C^\nu k_\mu + \dots}_{\text{Это всё шапк отождествлено}} =$$

$$= \hat B_{\lambda\nu} \hat B^\nu{}_\mu$$

$$\widehat{k^\nu D_\nu B_{\mu\lambda}} = k^\nu D_\nu (\hat B_{\mu\lambda}) - \overbrace{(k^\nu D_\nu C_\mu) k_\lambda}^{\text{Отождествлено}} - \dots$$

$$\boxed{k^\nu D_\nu \hat B_{\mu\lambda} = \widehat{k^\nu k^\rho R_{\nu\lambda\mu\rho}} - \hat B_{\lambda\nu} \hat B^\nu{}_\mu}$$

$$k^\nu D_\nu \theta = \frac{d\theta}{d\tau} = -\overbrace{k^\nu k^\rho R_{\nu\lambda\rho\mu} h^{\lambda\mu}} - \underbrace{\hat{h}_{\lambda\nu}\hat{h}^{\lambda\nu}}_{\overset{\parallel}{2}}\frac{\theta^2}{4}$$

$$+ \hat{\omega}_{\mu\nu}\hat{\omega}^{\mu\nu} - \hat{\sigma}_{\mu\nu}\hat{\sigma}_{\mu\nu}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{d\tau} = -R_{\nu\rho}k^\nu k^\rho + \hat{\omega}_{\mu\nu}\hat{\omega}_{\mu\nu} - \hat{\sigma}_{\mu\nu}\hat{\sigma}_{\mu\nu} - \theta^2/2}$$

Нулевое энергетическое условие!

$\boxed{R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geqslant 0} \Leftrightarrow \boxed{T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geqslant 0}$

Если выполнено слабое или сильное условие, то по непрерывности выполнено и это!

$\boxed{(p+\rho) \geqslant 0}$.

def Видимый горизонт — максимальная ловушечная поверхность

Компактная поверхность, на которой $\theta \leq 0$ для одного семейства нулевых геодезических (внешних) и $\theta < 0$ для другого. (Реально для одного семейства геодезических $\theta = 0$)

Маргинальная ловушечная поверхность

Теорема Хокинга – Пенроуза

1) $R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \geq 0 \quad \forall\ k^2 = 0$

2) Выполняются времениподобное и нулевые общие условия

3) $\exists$ ловушечная поверхность

$\Downarrow$

По крайней мере 1 времениподобная или нулевая геодезическая неполна