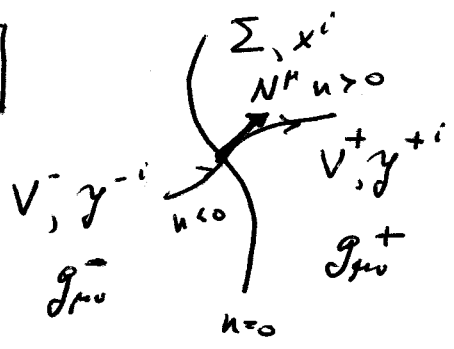


Оболочки в ОТО

$$\Sigma: \begin{cases} y^+ = y^+(x^i) \\ y^- = y^-(x^i) \end{cases}$$

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial y^{\mu+}}{\partial x^i} \frac{\partial y^{\nu+}}{\partial x^j} g_{\mu\nu}^+ = \frac{\partial y^{\mu-}}{\partial x^i} \frac{\partial y^{\nu-}}{\partial x^j} g_{\mu\nu}^-$$



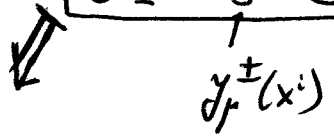
$$N_\mu^0 = \epsilon D_\mu n$$

6 условий

$$5 = 8 - 3$$

нормальных  
 $x^i \rightarrow x^i(x^i)$

действительно, ~~...~~  
 $N^2 > 0 \Rightarrow N^2 = +1$



Не во все 2-ур-ва - время можно выбрать оболочку

0-е условие сшивки

Сшивки

Введем гауссовы нормальные координаты

(4 криволинейных системы  
связи)

$$\begin{cases} ds_+^2 = \epsilon dn_+^2 + \gamma_{ij}^+ dx^i dx^j \\ ds_-^2 = \epsilon dn_-^2 + \gamma_{ij}^- dx^i dx^j \end{cases}$$

0-е условие сшивки  $\Rightarrow$  непрерывности метрики  $g_{\mu\nu}$  и т.д.

Можно ввести координаты  $x^{i+}, x^{i-}$  так, что

$$\begin{cases} \gamma_{ij}^+ |_\Sigma = \gamma_{ij}^- |_\Sigma \\ x_i^+ |_\Sigma = x_i^- |_\Sigma \end{cases}$$

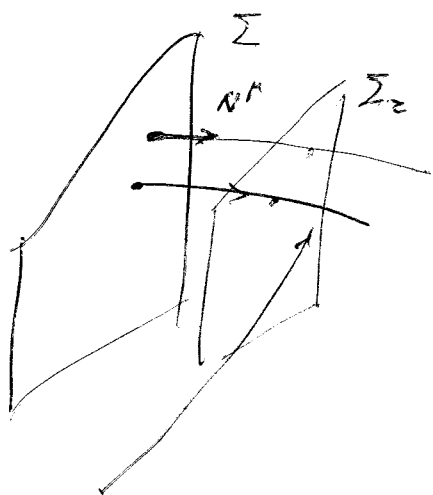
$\bar{Q}$

$$ds^2 = \epsilon dn^2 + \gamma_{ij}(n, x) dx^i dx^j$$

Гауссовы координаты  
Координаты непрерывности  
на поверхности

Если на поверхности непрерывные преобразованные координаты, то

Гауссовы нормальные координаты - Общий случай



$N^\mu$  - ортогонально к  $\Sigma$

Вопросом является то, какой вектор поверхности  $N^\mu$  - единичный вектор поверхности  $(N^\mu)^2 = \epsilon$

$x^i$  - координаты на поверхности

$(x^i, z)$  - координаты в окрестности поверхности  
Гауссовы нормальные координаты

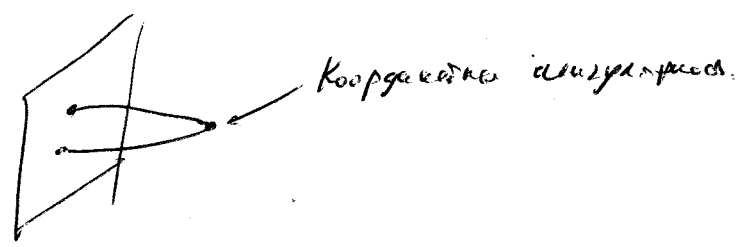
$$X_{(i)}^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$N^\mu = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$[X_{(i)}, N^\mu]^\nu = X_{(i)}^\mu \partial_\mu N^\nu - N^\mu \partial_\mu X_{(i)}^\nu = 0$$

Основное свойство координатных векторов Римана.

Когда закон изменения координат? Когда геодезическая перемещается



Основная теорема  $\Sigma_z$  - поверхность  $z = \text{const}$

$\Sigma_z \perp N$

$X_{(i)}$  - Векторы на  $\Sigma_z$

$$N^\mu D_\mu (X_{(i)}^\nu) = \underbrace{(N^\mu D_\mu N^\nu)}_{=0} X_{(i)\nu} + N^\mu N^\nu D_\mu X_{(i)\nu} =$$

0 ур.е геодезической

$$= N^\nu X^\mu \partial_\mu N_\nu = 0 \quad \underline{\text{ср}}$$

↑  
Коммутирующие векторы



{  $\gamma$  как ссл. набор поверхности  $\Sigma_z$  с метрикой  $\gamma_{ij}(\tau, x^i)$   
 $N^\mu \perp \Sigma_z \leftarrow$  Координата  $z$  лежит в направлении  $\perp \Sigma_z$

$$ds^2 = \underbrace{g_{00} dz^2}_{\downarrow} + \cancel{2g_{0i} dz dx^i} + \gamma_{ij} dx^i dx^j$$

$\uparrow$   
 $z \perp \Sigma_z$

$$N^\mu = \frac{\partial}{\partial z} \quad \left| \Rightarrow \quad \boxed{g_{00} = \epsilon} \right.$$

$(N^\mu)^2 = \epsilon$



$$\boxed{ds^2 = \epsilon dz^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j}$$

$\Sigma: u=0$

Нерезкая закл

$T_{\mu}^{\nu} = S_{\mu}^{\nu} \delta(u) + \underbrace{D_{\mu}^{+\nu} \theta(u) + D_{\mu}^{-\nu} \theta(-u) + \bar{T}_{\mu}^{\nu}}_{\text{Вкл на поверхности}}$

Вкл на поверхности.

$D_{\nu} T_{\mu}^{\nu} = 0 = S_{\mu}^{\nu} \delta'(u) D_{\nu} u + D_{\nu} S_{\mu}^{\nu} \delta(u)$

$D_{\nu} S_{\mu}^{\nu} = 0$   
 $S_{\mu}^{\nu} N_{\nu} = 0$

В Гауссовых нормальных координатах:  $S_{\mu}^{\nu} \mapsto S_i^j$  ( $S_{\mu}^{\mu} = 0$ )

Сохраняющийся тензор вдоль поверхности

$D_j S_i^j = 0$

~~Кривизна~~

Внешняя кривизна

$K_{\mu\nu} = -D_{\nu} N_{\mu}$

~~Кривизна~~

$K_{ij} = -\frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^i} \frac{\partial y^{\nu}}{\partial x^j} D_{\nu} N_{\mu}$

~~Кривизна~~

Гауссовы нормальные координаты:  $K_{ij} = -D_j N_i = -\cancel{\partial_j N_i}^0 + \Gamma_{ij}^h \epsilon$

$K_{ij} = \Gamma_{ij}^h \epsilon$

$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu} \leftarrow \text{Содержит } \delta(u)$

↕

Мы должны отдельно рассмотреть  $\delta$ -функцию в качестве  $\delta(u)$  и отдельно рассмотреть уравнение при  $u > 0$  и  $u < 0$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$$

$$g_{\mu\nu} - \text{неперервно}$$

$\partial_i g_{\mu\nu}$  - Производная функции непрерывности - тоже непрерывно

$\partial_n g_{\mu\nu}$  - Производная непрерывности. Может быть разрывная.

$$\Gamma_{ij}^n = \frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon} (\partial_i g_{nj} + \partial_j g_{ni} - \partial_n \delta_{ij}) = - \frac{1}{2\epsilon} \partial_n \delta_{ij} =$$

$$\Gamma_{nn}^n = 0$$

$$\Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} \delta^{ik} (\partial_n \delta_{kj})$$

$$\Gamma_{nn}^i = 0$$

$$K_{ij} = \epsilon \Gamma_{ij}^n = - \frac{1}{2} \partial_n \delta_{ij}$$

$$\Gamma_{ij}^n = \frac{1}{\epsilon} K_{ij}$$

$$\Gamma_{nn}^i = - \delta^{ik} K_{nj} = - K_{nj}^i$$

$$R_{\mu\lambda} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\nu + \text{Reg} =$$

$$R_{nn} = \partial_\nu \Gamma_{nn}^\nu - \partial_n \Gamma_{\nu n}^\nu =$$

$$= + \partial_n K_i^i = + \partial_n (K_i^+ \theta(n) - K_i^- \theta(-n))$$

$$= + \delta(n) [K_i^+] + \text{Reg}$$

$$[A] = A^+ - A^-$$

$$R_{ni} = \partial_j \Gamma_{ni}^j - \partial_n \Gamma_{hi}^n = \text{Reg}$$

$$R_{ij} = \partial_n \Gamma_{ij}^n - \partial_j \Gamma_{in}^n =$$

$$= \frac{1}{\epsilon} \delta(n) [K_{ij}]$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

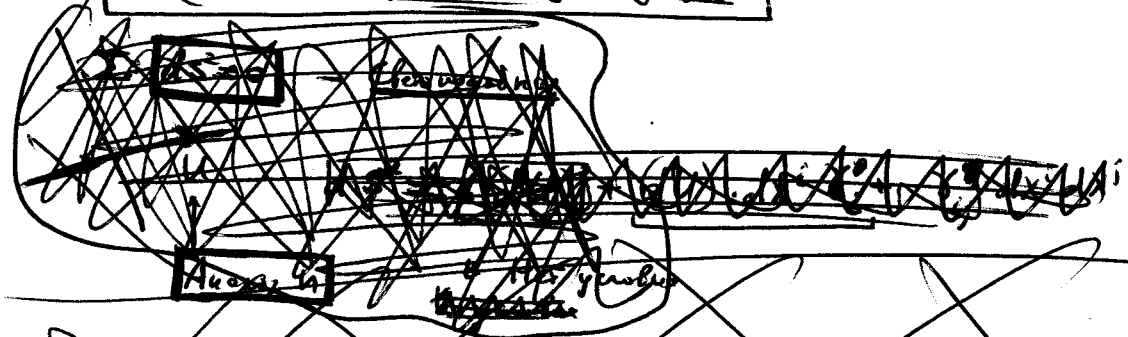
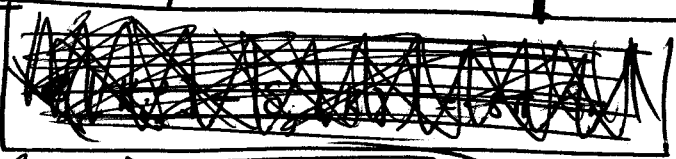
$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{ij} R_{ij} = \frac{1}{\epsilon} \delta(u) [K] + \frac{\delta^{ij}}{\epsilon} \delta(u) [K_{ij}] = \frac{2}{\epsilon} \delta(u) [K]$$

$$R_{nn} - \frac{1}{2} \epsilon R = 8\pi T_{nn} = \text{Reg}$$
  
$$\frac{\delta(u) [K] - \frac{1}{2} \epsilon \frac{2}{\epsilon} \delta(u) [K]}{\text{Reg}}$$

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = 0$$

$$R_{ij} - \frac{1}{2} \gamma_{ij} R = 8\pi T_{ij} = 8\pi S_{ij} \delta(u)$$
  
$$\frac{1}{\epsilon} \delta(u) [K_{ij}] - \frac{1}{2} \gamma_{ij} \frac{2}{\epsilon} \delta(u) [K]$$

$$[K_{ij}] - \gamma_{ij} [K] = 8\pi \epsilon S_{ij}$$



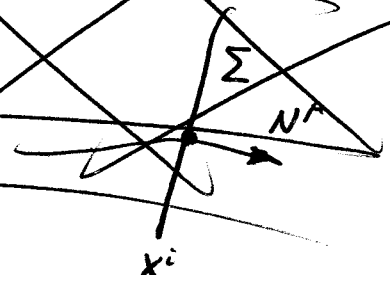
~~Слабогодные поверхности - предел времени координат!~~

~~$\Sigma \rightarrow$  Слабогодные~~

~~$N^{\mu} N_{\mu} = \epsilon$~~

~~$\Sigma: N(\gamma) = 0$~~

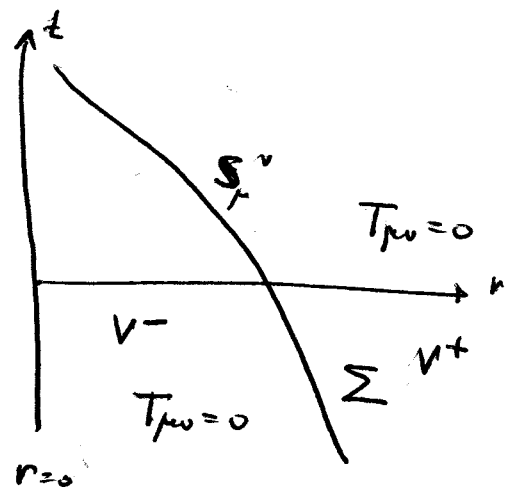
~~$N^{\mu} = \epsilon \delta^{\mu}_n$~~



~~$N^{\mu} N_{\mu} = \epsilon$~~

Компакс сферической области

$\Sigma$  - мировая поверхность области



1) Решаем ур. исл. Эйнштейна

вне области  $\Rightarrow T_{\mu\nu} = 0$

$R_{\mu\nu} = 0$

В  $\bar{\alpha}$  сферически / симметрично



Теорема Биркхофа: единственное решение  $\Rightarrow$  Шварцшильда

$$ds_{\pm}^2 = \left(1 - \frac{2M_{\pm}}{r_{\pm}}\right) dt_{\pm}^2 - \frac{dr_{\pm}^2}{1 - \frac{2M_{\pm}}{r_{\pm}}} - r_{\pm}^2 d\Omega^2$$

Одно и то же

2) Внутрь области  $\rightarrow$  при  $t \rightarrow -\infty$  не было никакой материи.

$M_- = 0$

$$ds_-^2 = - dt_-^2 - dr_-^2 - r_-^2 d\Omega_-^2$$

3)  $\emptyset$  условия совпадения

$r_- = r_+$  - Плоскость области одно и то же

Горизонтальная линия одна и та же

$$dt^2 = dt_-^2 - dr^2 = dt_+^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}}$$

Собственное время при  $d\theta = d\varphi = 0$

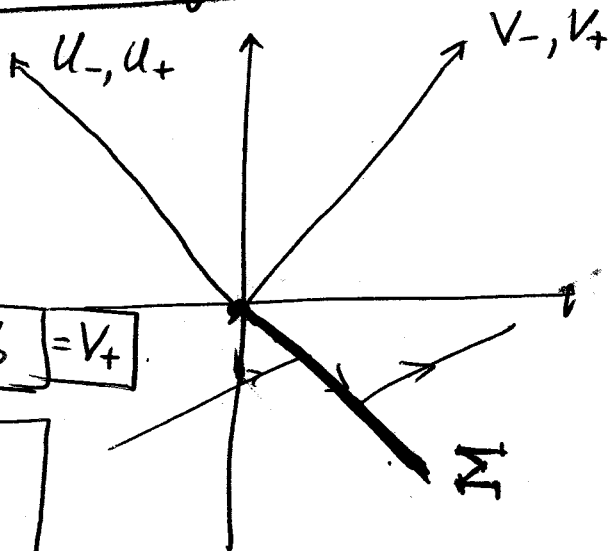
$t_-(r)$   
 $t_+(r)$  } Трансформация координат

$$\left(\frac{\partial t_-}{\partial r}\right)^2 = \left(\frac{\partial t_+}{\partial r}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + dr^2$$

4) Пучок волновых - естественных

6

$$\begin{cases} U_- = t_- - r \\ V_+ = t_+ + r \end{cases}$$



Получаем граничные  $V_- = V_0 = V_+$

$$\begin{cases} U_+ = -e^{-\frac{(t_+ - r_*)}{4M}} \\ V_+ = +e^{+\frac{(t_+ + r_*)}{4M}} \end{cases}$$

Координаты Крускала

$(U_-, V_-, U_+, V_+)$  - Разрешение координат!

Неразрешенные координаты:

$$U_- = t_- - r = -2r + V_0$$

$$V_- = V_0 = t_- + r \Rightarrow \boxed{\cancel{t_- = V_0 - r}} \quad \boxed{t_- = V_0 - r}$$

$$\boxed{r = -\frac{U_-}{2} - V_0}$$

$$U_+ V_+ = -e^{r_*/2M} = -\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} =$$

"

$$U_+ V_0$$

$$= \left(\frac{U_- - V_0}{4M} + 1\right) e^{-\frac{U_- - V_0}{4M}}$$

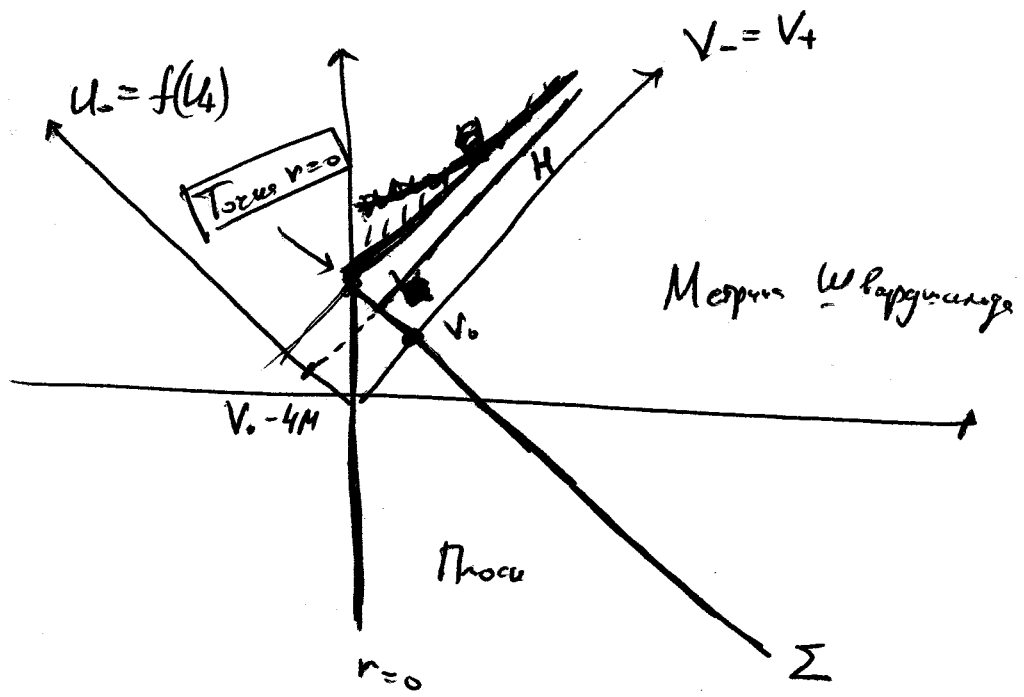
$$\boxed{U_+ = \frac{1}{V_0} \left(\frac{U_- - V_0}{4M} + 1\right) e^{-\frac{U_- - V_0}{4M}}}$$

Горизонт:  $U_+ = 0$



$$\frac{U_- - V_0}{4M} = 1$$

$$U_- - H = V_0 - 4M$$



$$V_+ U_+ = +1 \text{ - Сигнатурный}$$

$$\frac{V_-}{V_0} \left( \frac{U_- - V_0}{4M} + 1 \right) e^{-\frac{U_- - V_0}{4M}} = 1$$

$$V_- (U_- - U_{-H}) e^{-\frac{U_- - U_{-H}}{4M} + 1} = 4M V_0$$

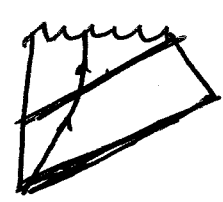
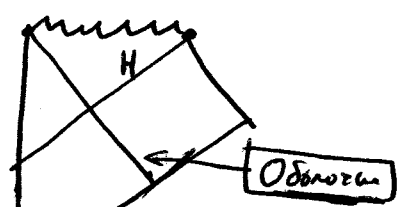
$$V_- \rightarrow \infty \Rightarrow U_- \rightarrow U_{-H}$$

~~Итого~~

$r=0$  -  $U_- = V_0$   
 $U_- = V_0$   
 $V_- = V_0$



Получаем дисперсию Пенроуза для решения с коллажем:



8/3 Решит уравнение из задачи 7а ~~в вакууме~~  
 вакуумной сферической области с

$$S_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & +\rho & & \\ & & & \\ & & & +\rho \end{pmatrix}$$

Решение:

$$[K_i^j] - \delta_i^j [K] = -4\pi S_i^j = -4\pi \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & +\rho & & \\ & & & \\ & & & +\rho \end{pmatrix}$$

Однородно:  $r = \text{const}$

~~$\partial_r r$~~   $\partial_r r$  - Момент для времени однородно или пространственно однородно

$$\Delta = g^{\mu\nu} \partial_\mu r \partial_\nu r < 0 \quad \text{Внешность черной дыры}$$

$R_+$  - область

$$\Delta = g^{\mu\nu} \partial_\mu r \partial_\nu r > 0 \quad T_+ \text{ область}$$

$$ds^2|_{\text{shell}} = -\epsilon dt^2 - r^2(\epsilon) d\Omega^2$$

~~Сферически симметричный тензор:~~  $K_2^2 = K_3^3$

$$K = K_0^0 + 2K_2^2$$

~~$[K_0^0] + 2[K_2^2]$~~

$$[\cancel{K_0^0}] - [\cancel{K_0^0}] - 2[K_2^2] = 8\pi \epsilon S_0^0$$

$$[K_2^2] = -4\pi \epsilon S_0^0$$

$$-\epsilon \cdot 8\pi S_2^2 = t[K_0^0] + [K_2^2]$$

Время времени упряго

$$F = r - R(t)$$

$$r(t) = \rho(z)$$

$\epsilon = -1$  - Времяподобное состояние

~~ААА~~

$$+ dz^2 - (\rho(z))^2 d\tau^2 = f(r) dt^2 - dr^2 h(r) - r^2 d\tau^2$$

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 f(r) = \dot{\rho}^2 h(r) + 1$$

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = \frac{1}{f(r)} (\dot{\rho}^2 h(r) + 1)$$

$$\tilde{n} = \frac{r - R(t)}{|\partial_\mu F \partial^\mu F|^{1/2}}$$

$$\partial_\mu F = \left(-\frac{dR}{dt}, 1\right)$$

$$-(\partial_\mu F)^2 = -\frac{1}{f} \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{1}{h}$$

$$N_\mu = -D_\mu \tilde{n} \Big|_\Sigma$$

$$N_\mu dx^\mu = - \frac{dr - \frac{dR}{dt} dt}{\sqrt{-\frac{1}{f} \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{1}{h}}} = - \frac{dr - \frac{dR}{dt} dt}{\sqrt{\frac{1}{h} - \frac{1}{f} \frac{\dot{\rho}^2 f}{\dot{\rho}^2 h + 1}}} = - \sqrt{\dot{\rho}^2 h + 1} \frac{(dr - \frac{dR}{dt} dt) \sqrt{h}}{\dot{\rho}}$$

$$N_\mu dx^\mu = - \sqrt{\dot{\rho}^2 h + 1} \sqrt{h} \left(dr - \frac{dR}{dt} dt\right)$$

$$K_{22} = - \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma^2} D_\nu N_\mu =$$

$$= - D_2 N_2 = + (\Gamma_{22}^1 N_1 + \Gamma_{22}^0 N_0) =$$

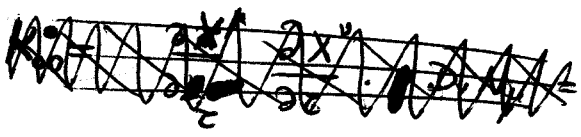
$$= N_1 (\Gamma_{22}^1 \rightarrow \frac{dR}{dt} \Gamma_{22}^0)$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22}) = +\frac{1}{2h} (+2r) = r/h$$

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (-\partial_0 g_{22}) = 0$$

$$K_{22} = N_1 r/h$$

$$K_2^2 = g^{22} K_{22} = -\frac{1}{h \dot{\beta}} \sqrt{\dot{\beta}^2 h + 1} \sqrt{h} = -\frac{1}{\dot{\beta}} \sqrt{\dot{\beta}^2 + 1/h}$$



$$K_{00} = -\frac{\partial X^\mu}{\partial z} \frac{\partial X^\nu}{\partial z} D_\mu N_\nu = -\left[ \frac{\partial X^0}{\partial z} \cdot \frac{\partial X^0}{\partial z} \right] D_0 N_0 + \left[ \frac{\partial X^1}{\partial z} \cdot \frac{\partial X^1}{\partial z} \right] D_1 N_1 - \dots$$

$$0 = \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$= -\frac{1}{\dot{\beta}} (\dot{\beta}^2 h + 1) D_0 N_0 - \dot{\beta}^2 D_1 N_1 - \frac{1}{\sqrt{h}} \sqrt{\dot{\beta}^2 h + 1} \dot{\beta} (D_0 N_1 + D_1 N_0)$$

$$(K_2^2)_+ = -\frac{1}{\dot{\beta}} \sqrt{\dot{\beta}^2 - 1/h}$$

$$(K_2^2)_- = -\frac{1}{\dot{\beta}} \sqrt{\dot{\beta}^2 - 1}$$

Ура бачае  
губачае  
врем сунугодвал  
снорочен

Метод супер

$$+\frac{1}{\dot{\beta}} \sqrt{\dot{\beta}^2 - 1/h} + \frac{1}{\dot{\beta}} \sqrt{\dot{\beta}^2 - 1} = +4\pi S$$

# Черная дыра

Что такое черная дыра?

Область, у которой не возвращается

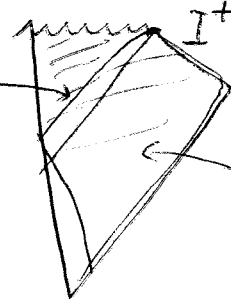
ничего убавшая на бесконечность

$$\forall p \in BH$$

$J^+(p)$  не пересекается с  $I^+$

Принадлежит будущему

Черная дыра



$V$  - внешняя черная дыра

Иными словами,  $M \setminus J^-(I^+)$  - Черная дыра

~~ВН~~

$$H = \partial(BH) \text{ - Горизонт}$$

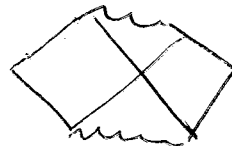
def Протянутая - область асимптотически приближается, если

$$J^-(I^+)$$

Внешняя черная дыра

не содержит сингулярности

$$q \in J^-(I^+)$$



не является "силой асимптотически приближается"

$J^-(q)$  - точка не содержит сингулярности

$$J^-(I^+)$$

Никакой наблюдатель у внешней г. дыры не видит сингулярности

def Если протянутая - не сила асимптотически/приближается, то она образует голая сингулярность

Теорема о сингулярностях: Всегда в результате коллапса чего угодно образуется сингулярность

Но! Это еще не значит, что получится черная дыра!

Может быть - голая сингулярность

~~Почему - стараясь избежать: Личности в будущем~~

Линейные возмущения в кр-ве Шварцшильда:

Не образуются сингулярности  
На самом деле, в линейном  
режиме, отталкивая

Пр-ва осветы модальности шиаршльда.

Wald 1979

Численные ~~исследования~~ исследования возмущений кр-вы - времени  
Керра (Press, Teukolsky, 1973) - тоже всё сходило

Циклоза космологическая эволюция: Гравитационный коллапс, сферический  
с модных космологических данных, всегда происходит только гёрные дорн,  
но не голь: сингулярности

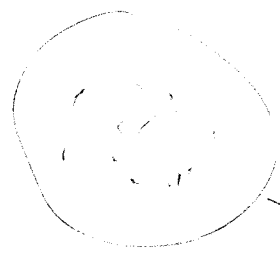
Условия на материю?

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Задаём  $T_{\mu\nu}$  - находим  $T_{\mu\nu}$

- (i)  $T_{\mu\nu}$  должно удовлетворит доминантному ~~энергетическому~~ энергетическому условию.
- (ii) Ур-ния (Эйнштейна + материи) можно сформулировать как хорошо поставленную задачу Коши.

Полн



Пр-ва Мичковича

Можно собрать в 1 точку

Три сингулярности

Уменьши параметр: добавили условия  $\Rightarrow$  Произошли только сингулярности

То же самое с идеальной жидкостью. (Мичковиче Волки)  
Yodanis, Seifert, Müller zum Hagen, 1973-1974.

Фундаментальны как материя, а не фреймвилье сингулярности

Цикл, Гипотеза:

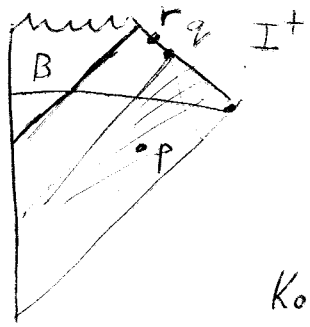
- 1) Хорошо поставленная задача Коши - единственное решение
- 2)  $u_r$ -й Эйлерова +  $u_r$ -й матрица
- 3) Матрица состоит из фундаментальных колебаний, задаваемых фундаментальными
- 3) Тлорина, асимптотически - иными катематическими
- 4) Три матрицы удовлетворяют доминирующему энергетическому условию.



В результате <sup>количества</sup> получается асимптотически - иными, а именно асимптотически - прогнозируемое поведение - время.

Теорема об отсутствии впа

- Найдется одно стационарное решение  $u_r$ -й без матрицы
- решение Коши.
- Найдется другое стационарное решение  $u_r$ -й Эйлерова -
- Максвелла - решение Коши -



$\frac{\sum \Delta B}{I}$  - область <sup>зерних дур</sup> ~~в~~  $P$  момент  $t$   
 $\Sigma$  - проекция на поверхность  
 Связные куски - зерних дур

Количество зерних дур увеличивается:

- зерних дур становится
- более формируются.