Диаграммы Пенроуза

ОТО-4

Компактный объект

Асимптотически плоское простр.

def Пространст. - асимптотически/плоское если $\exists$ СК, где

$$g_{\mu\nu} \mapsto \eta_{\mu\nu} + O(1/r)$$

при $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \longmapsto \infty$ при любом t

---

$\boxed{H_0}$ $\exists$ много проблем: (1) Как быстро мы достигаем асимптотически/плоского пр-ва?

(2) Зависящий от координат метод $\Rightarrow$ Поправки зависят от СК

$$\boxed{ds^2 = dt^2 - dr^2 - \underbrace{r^2 d\Omega^2}}$$

Опять пропадаем

$\exists$ способа уйти на ∞:

1) $t = const$, $r \mapsto \infty$

2) $r = const$, $t \mapsto \pm\infty$

3) $u = t - r = const$, $v \mapsto \infty$

$v = t + r = const$, $u \mapsto \infty$

$\boxed{\begin{aligned} u &= t - r \\ v &= t + r \end{aligned}} \longleftrightarrow$ Вдоль геодезических светоподобных

Слишком сложно $\Rightarrow$ Нужно притянуть ∞ на конечное расстояние и нарисовать.

$$\boxed{ds^2 = du\,dv - \frac{1}{4}(v-u)^2 d\Omega^2}$$

Замена координат $\boxed{V = 1/v}$ — притянут бесконечность $v = \infty$ на конечные расстояния

$$ds^2 = \frac{dU\,dV}{V^2} - 1/4\left(\frac{1}{V} - u\right)^2 d\Omega^2$$

H_0: метрика стала сингулярной! Ясно нельзя!

Расстояние (афинный параметр) до бесконечности ~~бесконечное~~

$\Downarrow$

Расстояние до $V=0$ тоже должно быть бесконечным.

А давайте определим $\boxed{\bar{g}_{\mu\nu} = V^2 g_{\mu\nu}}$

$$\boxed{d\bar{s}^2 = V^2\, du\, dV - \tfrac{1}{4}(1-uV)^2 d\Omega^2}$$

Гладкая метрика, очень просто связанная с предыдущей

$\Downarrow$

Мы привели её на конечное расстояние, сделав
(i) координатное
(ii) конформное
] Преобразование.

$$\boxed{\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu} = \left[(v_0^2+v^2)(u_0^2+u^2)\right]^{-1} \eta_{\mu\nu}}$$

$v_0^2 u_0^2$

$\sim \frac{4}{u^2 v^2}\eta_{\mu\nu}$ при $\boxed{u_0 \gg u_0,\ v \gg v_0}$

$\sim \eta_{\mu\nu}$ при $\boxed{u \sim u_0,\ v \sim u_0}$

~~II...~~

$$\boxed{U = u_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{u_0}\right) \qquad V = u_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{v}{u_0}\right)}$$

$$\boxed{U = T - R \qquad V = T + R}$$

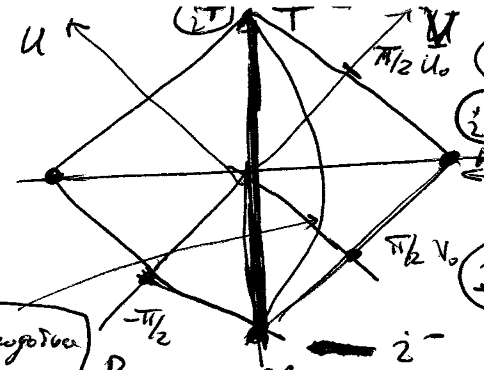
$$dU\,dV = \frac{u_0^2\, du}{u^2+u_0^2}\,\frac{dv}{v^2+u_0^2}$$

$\boxed{r = v - u}$

$$\boxed{d\bar{s}^2 = \frac{u_0^4}{(u^2+u_0^2)(v^2+v_0^2)}\, ds^2}$$

$$ds^2 = du\,dv = \frac{(u^2+u_0^2)(v^2+v_0^2)}{u_0^2}\, dU\,dV - (v-u)^2 d\Omega^2$$

$$d\bar{s}^2 = \boxed{dU\,dV} - \left(\frac{(v-u)^2}{\cancel{\ldots}}\right)^2 \frac{u_0^4}{(u^2+u_0^2)(v^2+u_0^2)}$$



Временно~~подобная~~ная бесконечность будущего Future timelike infinity

I^+ ⟵ Светоподобная бесконечность будущего

i^0 R ⟷ Пространственноподобная бесконечность

I^- — Past ~~timelike~~ null infinity

Светоподобная бесконечность прошлого

$\boxed{\text{Временноподобная геодезическая}}$

Временная бесконечность прошлого Past timelike infinity

$\boxed{r=0} \Rightarrow v-u=0 \Rightarrow \boxed{v=u}$

$\boxed{V=U}$ $\quad \boxed{u_0=v_0}$

$\Downarrow$

$\boxed{R=0}$

$\boxed{r>0} \Rightarrow \boxed{R>0}$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= u_0 \,\mathrm{tg}\, \frac{U}{u_0} \\ v &= v_0 \,\mathrm{tg}\, \frac{V}{v_0} \end{aligned}}$$

$$\frac{(v-u)^2}{(u^2+u_0^2)(v^2+v_0^2)4} = \cancel{\left(u_0\,\mathrm{tg}\frac{U}{u_0} - u_0\,\mathrm{tg}\frac{V}{u_0}\right)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{u_0^2}\left(\mathrm{tg}\frac{U}{u_0} - \mathrm{tg}\frac{V}{u_0}\right)^2 \cos^2\frac{U}{u_0}\cos^2\frac{V}{v_0}}{u_0^{\cancel{2}}\cancel{\left(\mathrm{tg}^2\frac{U}{u_0}+1\right)}\left(\mathrm{tg}^2\left(\frac{V}{u_0}\right)+1\right)}$$

$$= \frac{1}{u_0^2}\left(\sin\left(\frac{U}{u_0}\right)\cos\left(\frac{V}{v_0}\right) - \cos\left(\frac{U}{u_0}\right)\sin\left(\frac{V}{u_0}\right)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{u_0^2}\sin^2\left(\frac{-U+V}{u_0}\right) = \frac{1}{4u_0^2}\sin^2\left(\frac{2R}{u_0}\right)$$

$$\boxed{ds^2 = dT^2 - dR^2 - \underbrace{\frac{u_0^2}{4}\sin^2\left(\frac{2R}{u_0}\right)d\Omega_2^2}_{S^3}}$$

$\boxed{\text{Это — статическая Вселенная Эйнштейна.}}$

S^3 радиус $\boxed{u_0/2}$

$\boxed{S^3\times\mathbb{R}}$ ⟷ Мы компактифицировали пр-во

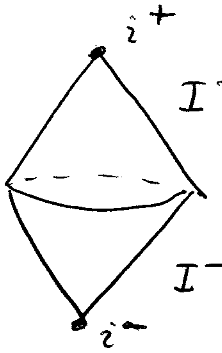
Мы получили результат:

∃ конформная изометрия между $(\mathbb{R}^4, \eta_{\mu\nu})$ и статической Вселенной Эйнштейна $(\mathbb{R}\times S^3, \bar{g}_{\mu\nu})$

Можно замкнуть регион и писать уравнения на бесконечности! Бесконечность пр-ва Минковского = $\boxed{\text{граница статической Вселенной Эйнштейна}}$

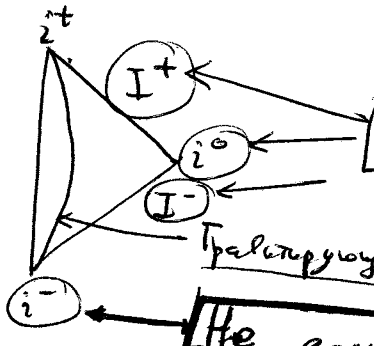
Свет всегда распространяется по диагоналям!

Конформное преобразование не меняет причинную структуру!



i^0 ← Бесконечность пр-ва Минковского.

Кривое пространство

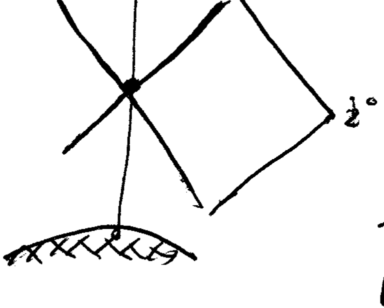


Должны быть как в Минковском

Гравитирующие тела присутствуют всегда

Не должны быть как в Минковском!

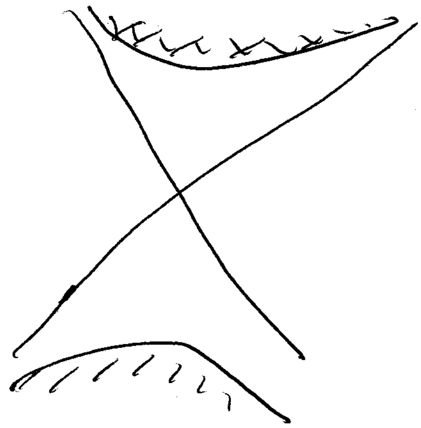
Давайте построим диаграмму Пенроуза для черной дыры



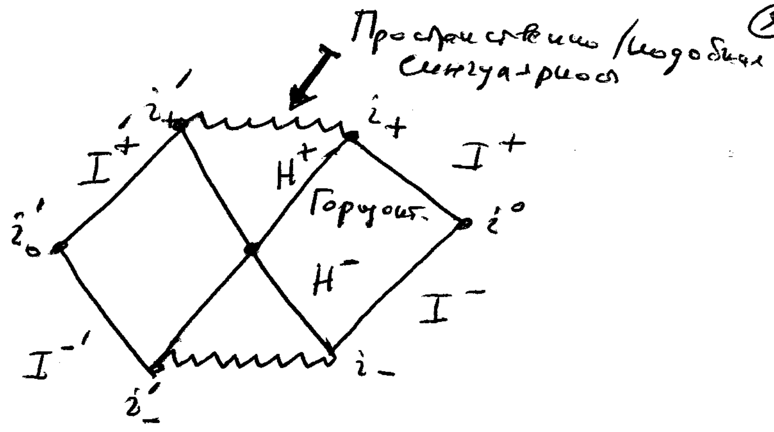
$$\boxed{ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} (dT^2 - dX^2) - r^2 d\Omega^2}$$

Так как 4 квадранта надо описать, то мы делаем преобразование в каждом из них

5

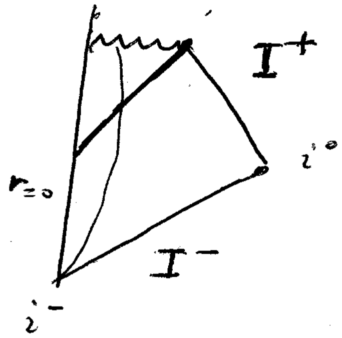


$\longleftrightarrow$



Решение с коллапсом

Позже получим узко решение!



[redacted] Энергия в асимптотически плоском пространстве

С энергией плохо в ОТО

Вывод законов сохранения α – параметр глобального преобразования.

$$\boxed{\phi \mapsto \phi_\alpha = \phi + \delta_\alpha \phi}$$

Мы делаем α зависящим от x и имеем

$$\delta S = \int d^4x \, \delta \mathcal{L} = \int d^4x \, \underbrace{\partial_\mu \alpha}\, J_\mu$$

Пропорционально производной, т.к. $\alpha = const$ – симметрия теории.

Но! этот метод не работает, если симметрия – калибровочна

В этом случае $\boxed{\delta S \equiv 0}$

Энергия : $\boxed{t \mapsto t + \delta t(x,t)}$

2-й метод вычисления предоставляет сама ОТО

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = T^{\mu\nu}$$

Но: Для ОТО $\boxed{\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0}$ – Уравнения движения

$\Downarrow$

$\boxed{\text{Опять энергия равна } 0}$

$\boxed{\text{Канонический гамильтониан гравитации} = 0}$

Энергия в асимптотически-плоском пространстве

Мы уже определили M чёрной дыры по тому, как она притягивает другие тела.

Обобщим результат

$$\boxed{\nabla^2\Phi = 0} \longleftrightarrow \text{Ньютоновская гравитация}$$

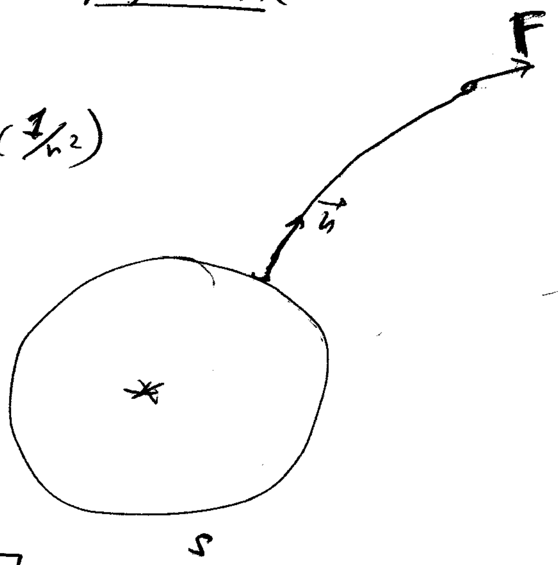
$$\boxed{\Phi = -\frac{M}{r}}$$, в общем случае — мультипольное разложение

$$\Phi = -\int dr' \frac{\rho(r')}{|r-r'|} = -\frac{M}{r} + O(1/r^2)$$

Закон Гаусса:

$$\boxed{M = +\frac{1}{4\pi}\int_S dA \; \underbrace{\vec\nabla\Phi\cdot\vec n}}$$

Сила, которую надо приложить чтобы держать на месте поверхность



Теперь рассмотрим асимптотически плоское пр-во.

ξ^a — Времениподобный вектор Киллинга — Статическое рассматриваем

$$\boxed{V = \xi^2} \longrightarrow 1 \text{ при } r\to\infty \qquad \boxed{(\xi \to \partial/\partial t)}$$ Правильно нормированное поле Киллинга

$$\boxed{U^\mu = \frac{\xi^\mu}{\sqrt{\xi^2}}} \longleftarrow \text{Статический наблюдатель}$$

$$a^\mu = U^\nu\nabla_\nu U^\mu = \frac{\xi^\nu}{\sqrt{\xi^2}}\nabla_\nu\frac{\xi^\mu}{\sqrt{\xi^2}} \quad - \quad \boxed{\text{Его ускорение}}$$

Дифференциальные формы

$$\boxed{\hat{\omega} = \omega_{\mu_1\ldots\mu_n}\, dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_n}}$$

Координаты формы.

$$\boxed{d\hat{\omega} = \partial_\lambda\, \omega_{\mu_1\ldots\mu_n}\, dx^{\lambda}\wedge dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_n}}$$

$$\begin{cases} (d\omega)_{\lambda\mu_1\ldots\mu_n} = \frac{1}{n}\left(\partial_\lambda\, \omega_{\mu_1\ldots\mu_n} - \partial_{\mu_1}\omega_{\lambda\ldots\mu_n} - \ldots - \partial_{\mu_n}\omega_{\lambda\ldots\mu}\right) \\ (\omega_1\wedge\omega_2)_{\mu_1\ldots\mu_n\nu_1\ldots\nu_m} = \omega_{1[\mu_1\ldots\mu_n}\,\omega_{2\,\nu_1\ldots\nu_m]} \end{cases}$$

Формула Картана $X_1\ldots X_{k+1}$ – Векторные поля.

Исключен.

$$d\omega(X_1\ldots X_{k+1}) = \frac{1}{n}\Big(\sum_i (-1)^{i-1}\,\partial_{X_i}\,\omega(X_1, X_2\ldots \hat{X}_i\ldots X_{k+1})$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\,\omega\big([X_i, X_j], X_1,\ldots \cancel{X_i},\ldots \cancel{X_j},\ldots X_{k+1}\big)\Big)$$

Д-в $\quad\boxed{\omega = T_\mu\, dx^\mu}$

$$d\omega = \partial_\lambda T_\mu\, dx^\lambda\wedge dx^\mu$$

$$d\omega\big|_{Cartan} = \frac{1}{2}\Big(\cancel{(-1)^{1-1}}\,\partial_X\,\omega(Y) + (-1)^{\cancel{2-1}}\,\partial_Y\,\omega(X)$$

$$+ (-1)^{\overset{3}{1+2}}\,\omega\big([X, Y]\big)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(X^\rho\partial_\rho(T_\lambda Y^\lambda) - Y^\rho\partial_\rho(T_\lambda X^\lambda) -$$

$$- T_\rho\big(\cancel{X^\lambda\partial_\lambda Y^\rho} - \cancel{Y^\lambda\partial_\lambda X^\rho}\big)\Big) =$$

$$= X^\rho Y^\lambda\,(\partial_\rho T_\lambda \ldots) \qquad \text{(ok)}$$

$$\boxed{d(\hat\omega_1\wedge\hat\omega_2) = (-1)^{p_1}\,\hat\omega_1\wedge d\hat\omega_2 + d\hat\omega_1\wedge\hat\omega_2}$$

$$= d\left(\omega_{1\,\mu_1\ldots\mu_{p_1}}\, dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_{p_1}}\wedge \omega_{2\,\nu_1\ldots\nu_{p_2}}\, dx^{\nu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\nu_{p_2}}\right)$$

$$=\left[(\partial_\lambda \omega_{1\,\mu_1\ldots\mu_{p_1}})(\omega_{2\,\nu_1\ldots\nu_{p_2}}) + (\omega_1)_{\mu_1\ldots\mu_{p_1}}(\partial_\lambda\omega_2)_{\nu_1\ldots\nu_{p_2}}\right]\times$$

$$\times\, dx^\lambda\wedge dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\nu_1}\ldots dx^{\nu_{p_2}} =$$

$$= d\hat\omega_1\wedge\hat\omega_2 + \hat\omega_1\wedge d\hat\omega_2 \qquad \text{ok}$$

$\int$ Интегрируем по определению

$$\boxed{\int f(x)\,dx^1\ldots dx^n \equiv n!\int f(x)\,dx^1\wedge dx^2\wedge\ldots\wedge dx^n}$$

Это удобно, т.к. при замене

$$x\mapsto x' = x'(x)$$

$$dx^1\ldots dx^n \mapsto (dx^1)'\ldots(dx^n)' = \left|\det\frac{\partial x'}{\partial x}\right| dx^1\ldots dx^n$$

$$dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n \mapsto (dx^1)'\wedge\ldots\wedge(dx^n)' = \det\frac{\partial x'}{\partial x}\, dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n.$$

Д/З

Будем рассматривать замены пер-х только с положительным якобианом.

$$n!\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n = \epsilon_{\mu_1\ldots\mu_n}\, dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_n}$$

ϵ-символ

ϵ-тензор $\quad \boxed{\sqrt{-g}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{\mu_1\ldots\mu_n} = \epsilon_{\mu_1\ldots\mu_n}}$

Инвариантная мера

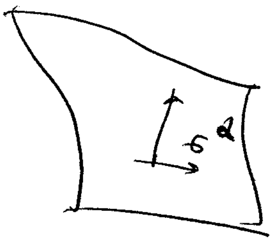
$\boldsymbol{\varepsilon}$-символ

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\hat\epsilon = \sqrt{g}\, n!\, dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n = \sqrt{g}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{\mu_1\ldots\mu_n}\, dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_n}}$$

Ограничение дифференциальной формы на поверхность

$\boxed{X^\mu(\sigma^\alpha)}$ $\qquad$ $\boxed{dX^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma^\alpha}\cdot d\sigma^\alpha}$



$$\hat\omega = \omega_{\mu_1\dots\mu_n}\, dX^{\mu_1}\wedge\dots\wedge dX^{\mu_n} =$$

$$= \boxed{\omega_{\mu_1\dots\mu_n}\frac{\partial X^{\mu_1}}{\partial\sigma^{\alpha_1}}\dots\frac{\partial X^{\mu_n}}{\partial\sigma^{\alpha_k}}\, d\sigma^{\alpha_1}\wedge\dots\wedge d\sigma^{\alpha_k}}$$

$$\int\hat\omega = \int\omega_{\mu_1\dots\mu_n} J^{\mu_1\dots\mu_n}_{\alpha_1\dots\alpha_k}\,\underline{d\sigma^{\alpha_1}\wedge\dots\wedge d\sigma^{\alpha_k}} =$$

$$= \underline{k!}\int\omega_{\mu_1\dots\mu_n}\boxed{J^{\mu_1\dots\mu_n}_{1\dots k}}\,\underline{d\sigma^1\wedge\dots\wedge d\sigma^k}$$

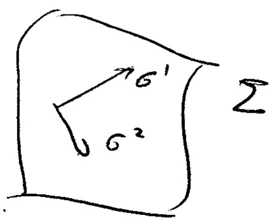
Элемент объёма

Можно засуммировать J и засунуть туда n!

def $\boxed{\int_P f(x) = f(P)}$

0-форма ≡ Скалярная функция

Пример



$$I = \int_\Sigma T_{\mu\nu}\, dX^\mu\wedge dX^\nu =$$

$$= \int_\Sigma T_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma^\alpha}\frac{\partial X^\nu}{\partial\sigma^\beta}\,\underline{d\sigma^\alpha\wedge d\sigma^\beta} =$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2!}}\int_\Sigma T_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma^1}\frac{\partial X^\nu}{\partial\sigma^2}\underbrace{d\sigma^1\wedge d\sigma^2\, 2!}_{d^2\sigma}$$

$$= \int_\Sigma d^2\sigma\,\boxed{\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma^1}\frac{\partial X^\nu}{\partial\sigma^2}\cdot T_{\mu\nu}}$$

По построению Лоренцев скаляр.

Пусть это всё плоско в 3D

Тогда $\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^1}\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^2} - (\mu \leftrightarrow \nu)$

Вдоль поверхности

$$\boxed{\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^1}\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^2} - (\mu \leftrightarrow \nu) = \epsilon_{\mu\nu\lambda} A^\lambda}$$

$$A^\lambda A_\lambda = \epsilon_{\lambda_1\mu_1\nu_1}\frac{\partial X^{\mu_1}}{\partial \sigma_1}\frac{\partial X^{\nu_1}}{\partial \sigma^2}\epsilon_{\lambda_2\mu_2\nu_2} g^{\lambda_1\lambda_2} \times \frac{\partial X^{\mu_2}}{\partial \sigma^1}\frac{\partial X^{\nu_2}}{\partial \sigma^2}$$

$$\boxed{A = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^1} \times \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^2}}$$

Нормаль к поверхности

$$2\epsilon_{\mu\nu\rho}\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^1}\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^2} = 2\delta_{\lambda\rho}A^\lambda \quad \text{ok}$$

$$I = \int_\Sigma d^2\sigma\, \epsilon_{\mu\nu\lambda} A^\lambda T^{\mu\nu}\, \tfrac{1}{2}$$

$$\det g_\sigma = \det\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^1} g_{\mu\nu}\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^2}\right)$$

$$\|A\|^2 = A^\lambda A_\lambda = \left(g_{\mu_1\mu_2}g_{\nu_1\nu_2} - g_{\mu_1\nu_2}g_{\nu_1\mu_2}\right)\frac{\partial X^{\mu_1}}{\partial \sigma^1}\frac{\partial X^{\mu_2}}{\partial \sigma^1}\frac{\partial X^{\nu_1}}{\partial \sigma^2}\frac{\partial X^{\nu_2}}{\partial \sigma^2}$$

$$= \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^1}\right)^2\left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^1}\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^2}\right)^2 = \det\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha} g_{\mu\nu}\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^\beta}\right)$$

$$= g_\sigma$$

$$\boxed{|A| = \sqrt{|g_\sigma|}} \Longrightarrow \boxed{A^\mu = \sqrt{|g_\sigma|}\, n^\mu} \leftarrow \boxed{\text{Нормаль}}$$

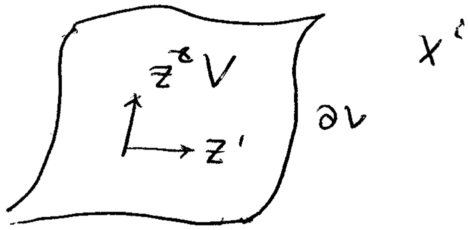
$$\boxed{T^{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho} T^\rho}$$

Ориентация через вектор

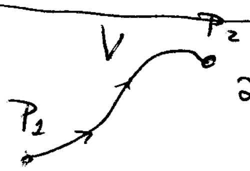
$$\boxed{n \propto \left[\frac{\partial}{\partial \sigma^1} \times \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\right]}$$

$$\boxed{I = \int_\Sigma d^2\sigma\, n_\mu T^\mu}$$

$$V:\ f(z^1\dots z^k)\le c \qquad \partial V:\ f(z^1\dots z^k)=c \qquad x^i = x^i(z)$$



$\boxed{k=1}$



$\partial V = \pm P_1 \pm P_2$ – Поверхность размерности 0

$$\int_P f(x) = \sum \pm f(P_i)$$

$$\boxed{\int_V df = \int_{\partial V} f = f_2 - f_1} \qquad \boxed{\partial V = P_2 - P_1}$$

$\boxed{\text{Форма } k-1}$ $\hat\omega$

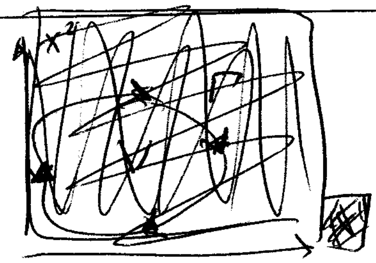
$$\boxed{\int_{\underbrace{\partial V}_{\sum \pm \partial V_i}} \hat\omega = k\int_V d\hat\omega}$$

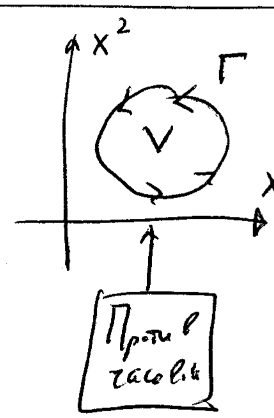
Теорема Стокса

$\boxed{n=2,\ \text{плоский случай}}$

$$\hat\omega = T_\alpha\, dx^\alpha$$

$$d\hat\omega = \partial_\alpha T_\beta\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$$



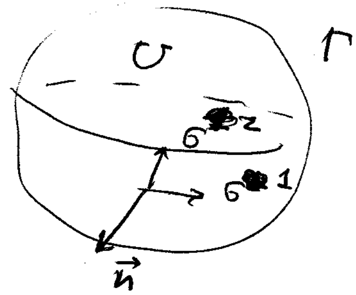


$$\oint_\Gamma \hat\omega = \oint_\Gamma T_\alpha dx^\alpha = k\int_V \underbrace{\partial_\alpha T_\beta\, dx^\alpha \wedge dx^\beta}_{2!\,\underbrace{dx^1\wedge dx^2}\ \underbrace{(\partial_1 T_2 - \partial_2 T_1)}\ \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\int dx^1 dx^2 \left(\partial_1 T_2 - \partial_2 T_1\right)$$

~~[illegible]~~

$\boxed{d=3}$



$$\int_\Gamma T_{ij}\, dx^i \wedge dx^j = \int d^2\sigma\, n_\mu T^\mu$$

$$\boxed{T_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho} T^\rho}$$

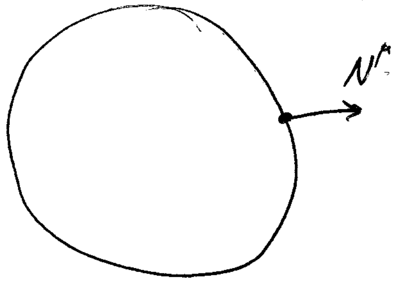
$$= \int_U \partial_\lambda T_{\mu\nu}\, \underbrace{dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu}_{} =$$

$$\| \qquad \underbrace{3!\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3}_{}\, \epsilon^{\lambda\mu\nu}\, \frac{1}{2}$$

$$= \int_U d^3x\, \cancel{\tfrac{1}{2}}\, \underbrace{\cancel{\epsilon^{\lambda\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu\rho}}}_{}\, \partial_\lambda T_\rho = \int_U d^3x\, \partial_\lambda T_\lambda$$

Итак, $M = \frac{1}{4\pi} \int \underbrace{dA}_{\text{Площадь сферы}} N^\mu a_\mu =$

$$\boxed{N^\mu N_\mu = -1}$$



$$= \frac{1}{4\pi} \int dA\, N^\mu \xi^\nu \nabla_\nu \xi_\mu$$

$$\boxed{\xi^\nu \nabla_\nu \xi^2 = 0}$$

Давайте сделаем трюк ушами.

$$\boxed{M = \frac{1}{4\pi} \int dA \frac{N^\mu}{\sqrt{\xi^2}} \xi^\nu \nabla_\nu \xi^\mu} =$$

Добавили руками

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi} \int dA \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\xi^2}} \left(N^\mu \xi^\nu - N^\nu \xi^\mu \right)}_{N^{\mu\nu}} \nabla_\nu \xi^\mu$$

$$\boxed{N^{\nu\mu} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2}} \left(N^\mu \xi^\nu - N^\nu \xi^\mu \right)}$$

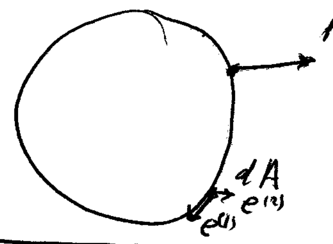
Лежит в плоскости $(N, \xi) \leftarrow$ 2D пр-во
Пропорционален ϵ-тензору.

$$\boxed{\int_{\partial S} N^\mu K_\mu \boxed{dA} = \int_S \nabla_\mu K_\mu \, dV}$$

$$\boxed{\nabla_\mu K_\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g}\, K^\mu \right)}$$

Итак $\quad M = \frac{1}{4\pi}\int dA\, N^\mu a_\mu = \frac{1}{4\pi}\int dA\, N^\mu \xi^\nu D_\nu \xi_\mu =$

$$= \frac{1}{8\pi}\int dA\, N^{\mu\nu} D_\mu \xi_\nu$$



$$\boxed{N^{\mu\nu} = \frac{N^\mu \xi^\nu - N^\nu \xi^\mu}{\sqrt{\xi^2}}} \longleftarrow \boxed{\xi^2 = 1 \text{ на бесконечности}}$$

Сделаем трюк дураки: Будем временно считать, что сферо-не бесконечная!

$$\boxed{M = \frac{1}{8\pi}\int_S dA\, N^{\mu\nu} D_\mu \xi_\nu}$$

~~В плоскости векторов $(N^\mu, \frac{\xi^\mu}{\sqrt{\xi^2}})$~~

$N^{\mu\nu} = \epsilon_{\alpha\beta}$ $\quad \boxed{\alpha, \beta = 0, 1}$

$\boxed{\frac{\xi^\mu}{\sqrt{\xi^2}} = e^{(0)} \qquad N = e^{(1)}}$

$\boxed{N^{\mu\nu} = \underbrace{e^{\mu(\alpha)} e^{\nu(\beta)}}_{\text{Проектор}} \epsilon_{\alpha\beta}} \longleftarrow$ Это — ϵ-символ в тетрадном базисе

$\boxed{e^{(2)}, e^{(3)}}$ — Живут на поверхности

$$dA = \hat{\epsilon}_{(S)} = \epsilon^{(S)}_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$$

ϵ форма на поверхности

Для dx вдоль пов-ти это — ϵ-форма
Для dx против пов-ти это — 0

$\boxed{\bar\alpha, \bar\beta = 2, 3}$

$$\boxed{dA = \overbrace{\epsilon_{\bar\alpha\bar\beta}\, e^{(\bar\alpha)}_\mu e^{(\bar\beta)}_\nu}^{\epsilon^{(S)}_{\mu\nu}}\, dx^\mu dx^\nu}$$

ϵ-символ в $(2, 3)$

$\boxed{\epsilon_{23} = 1}$

$$2 = \epsilon^{(S)}_{\mu\nu}\epsilon^{(S)}_{\mu\nu} = \epsilon_{\bar\alpha\bar\beta}\,\epsilon_{\bar\alpha\bar\beta}\, \cancel{e^{(\bar\alpha)}_\mu}\cancel{e^{(\bar\beta)}_\nu}\cancel{e^{(\bar\alpha)}_\mu}\cancel{e^{(\bar\beta)}_\nu} = 2$$

16

$$M = \frac{1}{8\pi}\int_S \underbrace{\epsilon_{\bar\alpha\bar\beta}}\, e_\mu^{\bar\alpha} e_\nu^{\bar\beta}\, \underbrace{dx^\kappa \wedge dx^\nu}\; \underbrace{\varepsilon_{\alpha\beta}\, e^{\lambda\alpha} e^{\rho\beta}}\, D_\lambda \xi_\rho$$

Направлени вдоль пов-ти

$$\boxed{a = (\alpha, \bar\alpha)}$$

$$\boxed{\epsilon_{abcd}\, e_\mu^a e_\nu^b e_\lambda^c e_\rho^d \longleftarrow \epsilon_{\bar\alpha\bar\beta}\, \epsilon_{\alpha\beta}\, e_\mu^{\bar\alpha} e_\nu^{\bar\beta}\, e_\lambda^\alpha e_\rho^\beta}$$

dx^κ, dx^ν – Направлени вдоль поверхност

$$\Downarrow$$

$$\Leftarrow \boxed{N_\mu dx^\kappa = \xi_\mu dx^\kappa = 0}$$

$$= \underbrace{\epsilon_{\bar\alpha\bar\beta cd}}\, e_\mu^{\bar\alpha} e_\nu^{\bar\beta}\, e_\lambda^c e_\rho^d \Rightarrow (cd) = (\alpha\beta)$$

$$= \underbrace{\epsilon_{\bar\alpha\bar\beta\alpha\beta}\, e_\mu^{\bar\alpha} e_\nu^{\bar\beta} e_\lambda^\alpha e_\rho^\beta}$$

$$\parallel$$

$\epsilon_{\bar\alpha\bar\beta}\, \epsilon_{\alpha\beta}$ – $\underline{\epsilon\text{-символ}}$

$$= \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} - \boxed{\varepsilon\text{ - тензор!}}$$

$\boxed{Д/з}$ Показать, что

$$\boxed{\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = \varepsilon_{abcd}\, e_\mu^a e_\nu^b e_\lambda^c e_\rho^d = \sqrt{-g}\, \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}}$$

$$\boxed{\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, e^{\mu a} e^{\nu b} e^{\lambda c} e_\rho^d \sqrt{-g} = \varepsilon_{abcd}}$$

17

$$\boxed{e^{\mu a} e^{\nu b} e^{\lambda c} e^{\rho d} \cdot \det e = \epsilon_{abcd}}$$

$$\boxed{\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \cdot \det e = \epsilon_{abcd}\, e_\mu^a e_\nu^b e_\lambda^c e_\rho^d} \longleftarrow \boxed{\text{Πο det} \\ \det}$$

8/3 $\boxed{D_\kappa \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = 0} \longleftrightarrow$ Τενσορ. AS ω $(\mu\nu\lambda\rho)$.

$$\boxed{D_\kappa \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = A_\kappa \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}}$$

$$\boxed{A_\kappa = \tfrac{1}{4!}\, \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} D_\kappa \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = 0}$$

$$\boxed{M = \frac{1}{8\pi} \int_S \underbrace{\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, dX^\mu \wedge dX^\nu \wedge D_\lambda \xi^\rho}_{\hat{\omega}}}$$

$$d\hat{\omega} = D_\kappa\left(\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} D_\lambda \xi^\rho\right) \underline{dX^\kappa \wedge dX^\mu \wedge dX^\nu}$$

$$\epsilon^{\epsilon\kappa\mu\nu} D_\kappa\left(\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} D_\lambda \xi^\rho\right) =$$

$$= 2\left[g_{\epsilon\lambda} g_{\kappa\rho} - g_{\epsilon\rho} g_{\kappa\lambda}\right] D_\kappa D_\lambda \xi^\rho =$$

$$= 2\Big(\underbrace{D_\rho D_\epsilon \xi^\rho}_{\substack{\parallel \\ -D_\rho D_\rho \xi^\epsilon}} - D_\lambda D_\lambda \xi^\epsilon\Big) = -4\, D_\rho D_\rho \xi^\epsilon$$

$$D_\mu D_\mu \xi_\lambda = -R_{\mu\lambda\mu\kappa} \xi^\kappa = -R_{\lambda\kappa} \xi^\kappa$$

$$\epsilon^{\epsilon\varkappa\mu\nu} D_\varkappa\left(\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} D^\lambda \xi^\rho\right) = -4 R_{\epsilon\varkappa}\xi^\varkappa$$

$$\underbrace{\epsilon^{\epsilon(\varkappa\mu\nu)}\epsilon_{\epsilon(\alpha\beta\gamma)}} D_\varkappa\left(\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} D^\lambda \xi^\rho\right) = -4\, \epsilon_{\epsilon\alpha\beta\gamma} R^{\epsilon}{}_{\varkappa}\xi^\varkappa$$

$\underline{(\varkappa\mu\nu) \mapsto (\alpha\beta\gamma)}$ ← Сумма по всем. 6 членов

$$\boxed{D_{[\varkappa}\left(\epsilon_{\mu\nu]\lambda\rho} D^\lambda \xi^\rho\right) = -\frac{2}{3}\epsilon_{\epsilon\varkappa\mu\nu} R^{\epsilon}{}_{\delta}\xi^\delta}$$

$$M = \frac{1}{8\pi}\int_S \dots = 2\cdot 3\,\frac{1}{8\pi}\int_V \left(-\frac{2}{6}\epsilon_{\epsilon\varkappa\mu\nu} R^{\epsilon}{}_{\delta}\xi^\delta\right) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_V \epsilon_{\epsilon\varkappa\mu\nu} R^{\epsilon}{}_{\delta}\xi^\delta\, dx^\varkappa\wedge dx^\mu\wedge dx^\nu$$

$\Downarrow$

В вакуумной области $\boxed{d\hat{\omega} = 0}$

и [redacted] поверхность можно деформировать

$$\boxed{M = \frac{1}{8\pi}\int_S \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, dx^\mu\wedge dx^\nu\, D^\lambda\xi^\rho}$$ ← Работает во всех стационарных асимптотически-плоских пространствах

Д/з Посчитать массу решения Шварцшильда, используя сферу конечного радиуса. $\boxed{R > 2M}$

Вакуум на ∞

$$D_\alpha \xi_\beta = \sqrt{\xi^2}\, D_\alpha\left(\frac{\xi_\beta}{\sqrt{\xi^2}}\right) - \underbrace{\sqrt{\xi^2}\, D_\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2}}\right)}\xi_\beta$$

$$= \cancel{\sqrt{f}}\, \underbrace{D_\alpha e_{0\beta}} + \cancel{\sqrt{f}}\, \delta^1_\alpha \left(+\tfrac{1}{2}\right) \frac{1}{f^{3/2}} f'\, \delta^0_\beta$$

$\sqrt{f}$ $\quad \omega_{\alpha 1 0}\, e^1_\beta$ $\quad - \delta^1_\beta \sqrt{f}$

$$\delta^0_\alpha \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

$$= -\delta^0_\alpha\, \delta^1_\beta\, \frac{f'}{2} + \frac{f'}{2}\, \delta^1_\alpha\, \delta^0_\beta$$

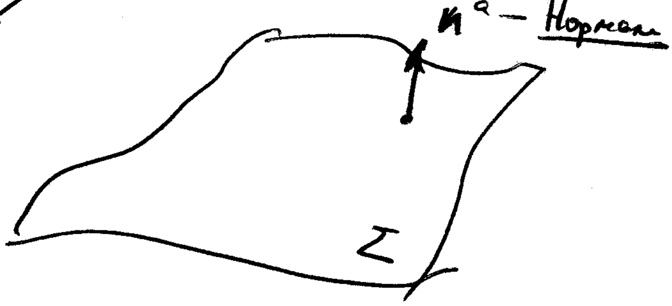
$$M = \frac{1}{\cancel{8\pi}} \int \cancel{R^2}\, \underbrace{\sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi}_{\cancel{4\pi}} \underbrace{\left(\pm \frac{f'}{\cancel{2}}\right)}_{\frac{\cancel{2}M}{\cancel{R^2}}} = M \quad \text{ok}$$

Если $R_{ab} \neq 0$

$$M = \frac{1}{8\pi}\int_S \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, dx^\mu \wedge dx^\nu D^\lambda \xi^\rho =$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\int \underbrace{\epsilon_{\epsilon\varkappa\mu\nu}}_{n_\epsilon} R_{\epsilon\delta}\xi^\delta \underbrace{dx^\varkappa \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu}_{dV_\Sigma}$$

$$n_\epsilon\, dV_\Sigma$$



$$\boxed{M = -\frac{1}{8\pi}\int n_\epsilon\, dV_\Sigma\, R_{\epsilon\delta}\xi^\delta}$$

$$R_{\mu\nu} = 8\pi\left(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} T g_{\mu\nu}\right)$$

$$\boxed{M = -\frac{\cancel{8\pi}}{\cancel{8\pi}}\int dV\, n_\epsilon \xi^\delta\left(T_{\epsilon\delta} - \tfrac{1}{2} T g_{\epsilon\delta}\right)}$$

$$\boxed{M = -\int dV\, n^\epsilon \xi^\delta\left(T_{\epsilon\delta} - \tfrac{1}{2} T g_{\epsilon\delta}\right)}$$

Статическое пр-во $\boxed{\xi = \frac{\partial}{\partial t}}$ $n = e_0 = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}}$ $\boxed{T = \rho + 3p}$

$$M = -\frac{1}{2}\int \frac{dV}{\ } \sqrt{f}\left(\underset{\rho}{T_{00}} - \tfrac{1}{2}(\rho + 3p)\right)$$

$$\boxed{M = -\int dV\, n^\epsilon \xi^\delta\left(T_{\epsilon\delta} - \tfrac{1}{2} T g_{\epsilon\delta}\right)}$$

Общие нестационарные асимптот-плоские пр-ва

P_μ – Вектор энергии-импульса

2 бесконечности: $\begin{cases} i_0 \leftrightarrow \text{Энергия объекта в данный момент времени} \\ I^{\pm} \leftrightarrow \text{Потоки радиации} \end{cases}$

$\Downarrow$

2 определения энергии

Требования на P_μ:

1) Должен сохраняться относительно трансляций в асимптотическом времени.
2) Относительно асимптотических бустов должен преобразовываться как 4-вектор.
3) Не должен зависеть от поверхности на ∞

$\boxed{\xi^\mu \text{ – Вектор, который стремится к } \frac{\partial}{\partial t} \text{ при } r \to \infty}$

I

$$\boxed{M = \frac{1}{8\pi}\lim_{r\to\infty}\int_S dx^\mu \wedge dx^\nu \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} D^\rho \xi^\lambda}$$

$\boxed{\text{Завис. от } S}$

$\boxed{\text{ADM}}$ mass — Arnowitt, Deser, Misner, 62

~~Bondi energy (Bondi, van der Burg, Metzner, 1962)~~

Но: $\boxed{\xi \leftrightarrow \text{Вектору Киллинга}}$ (Всё лучше удовлетворяет уравнению Киллинга)

$\Downarrow$

Можно надеяться, что зависимость от топологии пропадает.

(Geroch, Winicour, 1981)

■ Более того, $\boxed{M \propto \xi^a}$

Асимптотически можно выбрать разные СО $\Rightarrow$ Разные $\boxed{\frac{\partial}{\partial t} = \xi^a}$

$\boxed{\text{Для разных } \xi^a \text{ – Разные масса}}$

$$\boxed{M = \int_S dx^\mu \wedge dx^\nu \, \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \, D^\lambda \xi^\rho}$$

$$\boxed{g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}}$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\partial_\mu h^\lambda_{\ \nu} + \partial_\nu h^\lambda_{\ \mu} - \partial^\lambda h_{\mu\nu}\right)$$

$$\boxed{\xi = \partial/\partial t}$$

$$M = \frac{1}{8\pi}\int_S dx^\mu \wedge dx^\nu \, \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\Big(\cancel{\partial^\lambda \xi^\rho}^{\,\to 0} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(\xi^\epsilon)\left(\partial^\lambda h^\rho_{\ \epsilon} + \cancel{\partial^\epsilon h^\rho_{\ \lambda}} - \partial^\rho h^\lambda_{\ \epsilon}\right)}_{\Gamma^{\rho}_{\lambda\epsilon}\xi^\epsilon}\Big)$$

$$M = \frac{1}{8\pi}\int_S \underbrace{dx^\mu \wedge dx^\nu}_{\substack{\parallel \\ dA \ \underbrace{\epsilon_{\alpha\beta} N^\alpha_\lambda N^\beta_\rho}_{\xi_\lambda N_\rho - \xi_\rho N_\lambda}}} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \, \xi^\epsilon \left(\partial_\lambda h_{\rho\epsilon} - \cancel{\partial_\rho h_{\lambda\epsilon}}\right)$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_S dA \left(\xi_\lambda \cancel{N_\varkappa} \xi_\epsilon \partial_\lambda h_{\varkappa\epsilon} - \xi_\rho \cancel{N_\varkappa} \xi_\epsilon \partial_\varkappa h_{\rho\epsilon}\right) N_\varkappa$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_S dA \, N_\varkappa \Big[\underbrace{\boxed{\xi_\lambda \xi_\epsilon \partial_\lambda h_{\varkappa\epsilon}}}_{0} - \underbrace{\xi_\lambda \xi_\epsilon \partial_\varkappa h_{\lambda\epsilon}}_{\partial_\varkappa h_{00}}\Big]$$

$$0 = \mathcal{L}_\xi h_{\mu\nu} = \xi^\lambda \partial_\lambda h_{\mu\nu} + h_{\mu\varkappa} \partial_\nu \xi^\varkappa + h_{\nu\varkappa} \partial_\mu \xi^\varkappa .$$