ОТО-3 | Координаты Крускала

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}} - r^2 d\Omega^2}$$

$\boxed{M \geq \frac{4}{9}R}$ — Нет статических решений вида звезды.

$\Downarrow$

[Должен произойти гравитационный коллапс к решению Шварцшильда.

$\boxed{\text{Сингулярность при } r = 2M}$ — Координатная

Пример. $\boxed{ds^2 = \frac{1}{t^2}dt^2 - dx^2}$ $\boxed{t \in (0;\infty)}$

$$t' = 1/t \Rightarrow \boxed{ds^2 = (dt')^2 - dx^2}$$

Просто плоское пространство.

Как отличить пространство с координатной сингулярностью от настоящей?

1) Простой, но не стандартный метод: Посчитать $\boxed{R_{\mu\nu\rho\lambda} R^{\mu\nu\rho\lambda}}$

{ Не меняется при преобразованиях координат.
• Не сингулярен, если — координатная сингулярность

Если $R^2_{\text{мкр}}$ сингулярно, то пространство — сингулярно.

Обратное не обязательно верно.

2) Найти замену координат, убирающую сингулярность.

Стандартный метод.

Геодезическая неполнота

Нужно чтобы понять, находится ли сингулярность на бесконечности

$\Updownarrow$

Геодезические достигают её за ∞ собственное время

(∞ аффинный параметр в случае светоподобных геодезических)

Из Примера 1 — **Геодезические**

$$\boxed{t = x - x_0} \qquad \boxed{t = -(x - x_0)} = -x + x_0$$

$$\boxed{V = t + x} \qquad \boxed{u = t - x}$$

Аффинный параметр

Проверяем $\quad u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{dV} = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \qquad \boxed{(u^\mu)^2 = 0}$ ← ok

$$u^\mu \partial_\mu u^\nu = u^\mu \nabla_\mu u^\nu = 0 \quad \leftarrow \text{ok}$$

$$\boxed{\begin{aligned} t &= \frac{V+u}{2} \\ x &= \frac{V-u}{2} \end{aligned}}$$

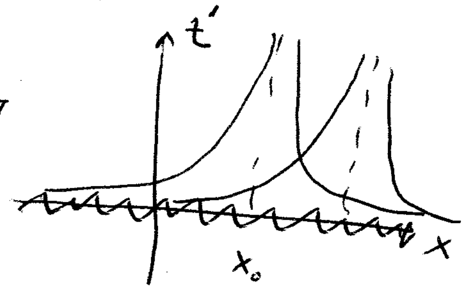
$$V = 2x - x_0 = 2t + x_0$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{V + x_0}{2} \\ \frac{1}{t'} = t &= \frac{V - x_0}{2} \end{aligned}}$$

$$u = -2x + x_0 = 2t - x_0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{t'} = t &= \frac{u + x_0}{2} \\ x &= -\frac{u - x_0}{2} \end{aligned}}$$

$$\boxed{t' = \pm \frac{1}{x - x_0}}$$



$\Downarrow$

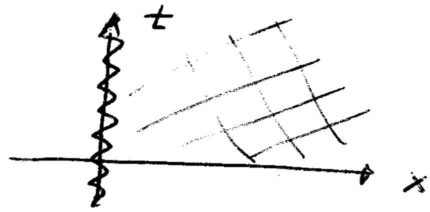
$\boxed{\text{Сингулярность при } t' = 0}$ на самом деле бесконечность!

Зато при u, V - конечном мы достигаем $\boxed{t' = \infty}$

$\Updownarrow$

[illegible]

Пространство Риндлера



$$\boxed{ds^2 = x^2 dt^2 - dx^2}$$

$$\boxed{x \in [0;\infty)}$$

{ Первый шаг - посчитать $(R_{\mu\nu\rho\alpha})^2$ - пропускаем.
Он - не сингулярен при $x=0$

$\Downarrow$

Надо искать несингулярные координаты.

Как? Нулевые геодезические! Образуют сетку.

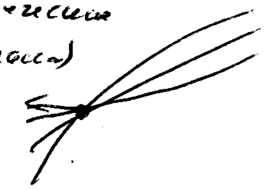
~~Vedglzatr~~ Координаты { U - вдоль геодезических
V - нумерует геодезические

Почему это - расширение пространства?

Ключ - геодезическая неполнота: геодезические пересекают сингулярность при конечном U

Почему это - не сингулярная СК?

В случае геодезических - не гарантировано. ~~Например,~~ Они могут пересечься. (Геодезические 1-го класса)



Но в 2D $\underbrace{(U^\mu)^2 = 0}$

$\boxed{2 \text{ решения}}$

$\Downarrow$

U^μ у всех геодезических должно совпадать

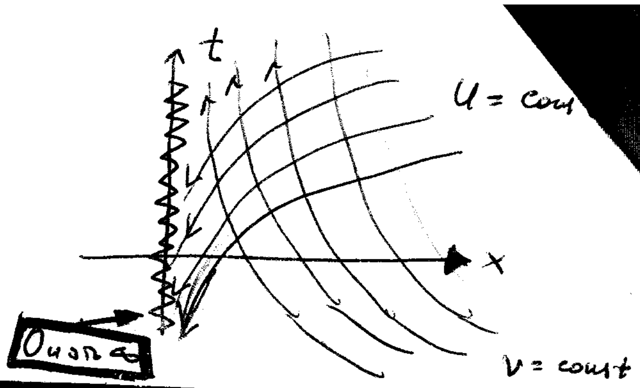
$\Downarrow$

Геодезические везде будут совпадать

$(u^\mu)^2 = x^2 (u^0)^2 - (u^1)^2 = 0$

$\boxed{u^{(1)} = \pm x\, u^0}$

$\dot{x} = \pm x \cdot \dot{t}$



$\frac{dt}{dx} = \pm 1/x \Rightarrow \boxed{t = \pm \ln x + \text{const}}$

~~[illegible]~~

$$\boxed{\begin{aligned} u &= t + \ln x \\ v &= t + \ln x \end{aligned}} \qquad 2\ln x = u - v, \quad x = e^{(u-v)/2}$$

$$du\,dv = \left(dt + \frac{dx}{x}\right)\left(dt - \frac{dx}{x}\right) = dt^2 - \frac{dx^2}{x^2}$$

$$ds^2 = x^2\,du\,dv = e^{u-v}\,du\,dv$$

$\boxed{ds^2 = e^{-u+v}\,du\,dv} \leftarrow$ Мы ещё не достигли искомого

$e^{-u}du = dU \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} U &= -e^{-u} \\ V &= e^{v} \end{aligned}}$

$e^{+v}dv = +dV$

$\boxed{ds^2 = dU\,dV}$

Аффинный параметр: $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ — поле Киллинга.

$\boxed{\text{Д/З}}$ Показать, что пр-во Риндлера — геодезически неполное с помощью вычисления аффинного параметра

$$\underbrace{\pm \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}} = \xi^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} - g_{\mu\lambda}\partial_\nu \xi^\lambda - g_{\nu\lambda}\partial_\mu \xi^\lambda = 0$$

$E = (u^\mu \xi_\mu) = \text{const} = \frac{dt}{d\lambda}x^2$ Вдоль линий $\boxed{u = \text{const}}$

$$\int E\,d\lambda = \int \underbrace{x^2}_{= e^{v-u}} \underbrace{dt}_{\frac{dv}{2}} = \frac{e^{-u}e^{v}}{2}$$

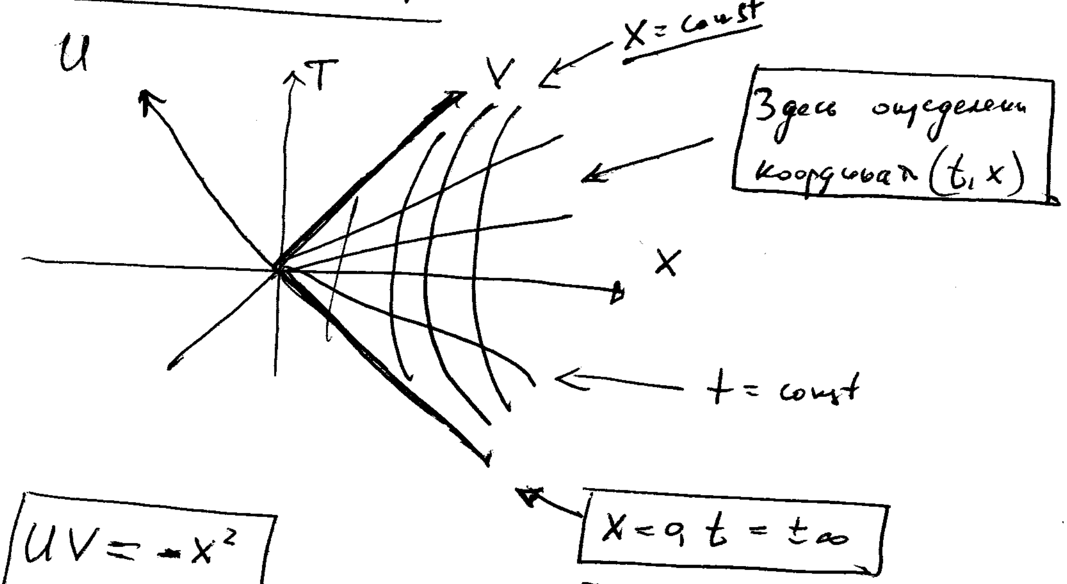
$\boxed{\lambda = \text{const} + \frac{e^{v-u}}{2}} \Rightarrow \boxed{\lambda_{out} = e^{v}}$, $\boxed{\lambda_{in} = e^{-u}}$ аффинный параметр

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_{out} &= xe^{t}\\ \lambda_{in} &= -\frac{1}{x}e^{-t}\end{aligned}}$$

$$\left.\begin{aligned} t + \ln x &= v = -\infty, \quad u = const\\ t - \ln x &= u = +\infty, \quad v = const\end{aligned}\right\}$$

Области, за которые можно продолжить

$$\boxed{\begin{aligned} U &= -xe^{-t} = T - X < 0\\ V &= xe^{t} = T + X > 0\end{aligned}}$$



$$\boxed{\begin{aligned} UV &= -x^2\\ \frac{V}{U} &= -e^{2t}\end{aligned}}$$

Весь световой конус сжат в точку.

Задача. Показать, что пр-во Риндлера – пр-во равномерно ускоряющихся наблюдателей.

$\boxed{x = const}$

$$\boxed{u^\mu = (1/x, 0)}$$

$$d\tau^2 = dt^2 x^2 - 0 \Rightarrow \boxed{d\tau = x\,dt}$$

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \Big(\underbrace{-\frac{dx}{x^2 x\,dt}}, 0\Big) = 0$$

Ускорение вдоль геодезической

$$\boxed{\frac{Du^\mu}{d\lambda} = a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu}$$

$$\boxed{a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu} = \frac{du^\mu}{d\tau}$$ в плоском пр-ве

$$T^2 - X^2 = -x^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} T &= x\,\mathrm{sh}\,\alpha \\ X &= x\,\mathrm{ch}\,\alpha \end{aligned}} \qquad d\tau^2 = dT^2 - dX^2 = d\alpha^2(x^2\mathrm{ch}^2\alpha - x^2\mathrm{sh}^2\alpha) = x^2 d\alpha^2$$

$$u^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} = \frac{1}{\cancel{x}}\frac{d}{d\alpha}(\cancel{x}\,\mathrm{sh}\,\alpha, \cancel{x}\,\mathrm{ch}\,\alpha) = (\mathrm{ch}\,\alpha, \mathrm{sh}\,\alpha)$$

$$a^\mu = \frac{1}{x}\frac{d}{d\alpha}(\mathrm{ch}\,\alpha, \mathrm{sh}\,\alpha) = \frac{1}{x}(\mathrm{sh}\,\alpha, \mathrm{ch}\,\alpha)$$

$$(a^\mu)^2 = -1/x^2 = -a^2 \implies \boxed{a = 1/x}$$

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0 g_{00}) = 0$$

$$\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{00}) = \frac{1}{\cancel{2}x^{\cancel{2}}}\cancel{2}\cancel{x} = 1/x$$

$$\Gamma^1_{00} = \cancel{\frac{1}{2}}g^{11}(-\underbrace{\partial_1 g_{00}}_{\cancel{2}x}) = +x$$

$$\Gamma^0_{11} = 0 \qquad \boxed{u^\mu = (1/x, 0)}$$

$$\Gamma^1_{11} = 0$$

$$a^0 = u^\nu \nabla_\nu u^0 = \cancel{2u^0\Gamma^0_{01}u^1}_{\to 0} + \cancel{u^1\partial_1 u^0}_{\to 0} = 0$$

$$a^1 = u^\nu \nabla_\nu u^1 = \cancel{u^\nu\partial_\nu u^1}^{\to 0} + u^0\Gamma^1_{00}u^0 = 1/x^2 \cdot x = 1/x$$

$$\boxed{a^\mu = (0, 1/x)}$$

В пространстве Шварцшильда ситуация похожая

$$\boxed{u^\mu = \frac{\xi^\mu}{\sqrt{\xi^2}}} \longleftarrow \text{Вдоль времени} \quad \boxed{\xi = \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\parallel$$

$$e_0^\mu .$$

$$a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu = \underline{e_0^\nu \nabla_\nu e_0^\mu}$$

$$a_a = e_a^\mu a_\mu = \underbrace{e_a^\mu}\, e_0^\nu \, \underbrace{\nabla_\nu e_0^\mu} = \underset{\underset{(\sqrt{f},\,0)}{\parallel}}{e_0^\nu} \, \omega_{\nu a 0} \, g^{\kappa\nu} \quad 1/f$$

$$a_1 = 1/f \sqrt{f} \, \underset{\underset{0}{\parallel}}{\omega_\nu} \underbrace{10} = -\frac{1}{\sqrt{f}} \left(- \frac{f'}{2\sqrt{fh}} \right)$$

$$\boxed{a_1 = + \frac{M}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}} \longleftarrow \boxed{a_a = (0, a, 0, 0)}$$

$$\Downarrow$$

Также, как, и в пр-ве Риндлера, $\boxed{a \mapsto \infty}$ при $\boxed{r \mapsto 2M}$

$$\Downarrow$$

$\boxed{\text{Всё должно решиться также}}$

$(\theta, \varphi) \longleftarrow$ Метрика тривиальна

$\Downarrow$

$$\boxed{ds_2^2 = dt^2\left(1-\frac{2M}{r}\right) - \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}}}$$

Радиальные светоподобные геодезические:

$$\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2\left(1-\frac{2M}{r}\right) = \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2\frac{1}{1-\frac{2M}{r}}$$

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \frac{1}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2} = \left(\frac{r}{r-2M}\right)^2$$

$$\frac{dt}{dr} = \pm\frac{r-2M+2M}{r-2M} = \pm\left(1+\frac{2M}{r-2M}\right)$$

$$t = \pm\left[r + 2M\ln\left(\frac{r}{2M}-1\right)\right] + const$$

$$\boxed{r_* = r + 2M\ln\left(\frac{r}{2M}-1\right)}$$

$$dr_* = \cancel{dr} + \frac{2M\,dr}{r-2M} + \frac{dr(r-2M)}{r-2M}$$

$$= \frac{r\,dr}{r-2M}$$

$$\boxed{t = \pm r_* + const}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= t - r_* \\ v &= t + r_* \end{aligned}}$$

$$du\,dv = dt^2 - dr_*^2 = dt^2 - \frac{r^2dr^2}{(r-2M)^2}$$

$$\boxed{ds_2^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)du\,dv} \longleftarrow$$ Лучше не стало, как и раньше

$$r + 2M\ln\left(\frac{r}{2M}-1\right) = r_* = \frac{1}{2}(v-u)$$

$$e^{r/2M}\left(\frac{r}{2M}-1\right) = \exp\left(\frac{1}{4M}(v-u)\right)$$

$$\frac{r}{2M}\left(1-\frac{2M}{r}\right)e^{r/2M} = e^{\frac{v-u}{4M}}$$

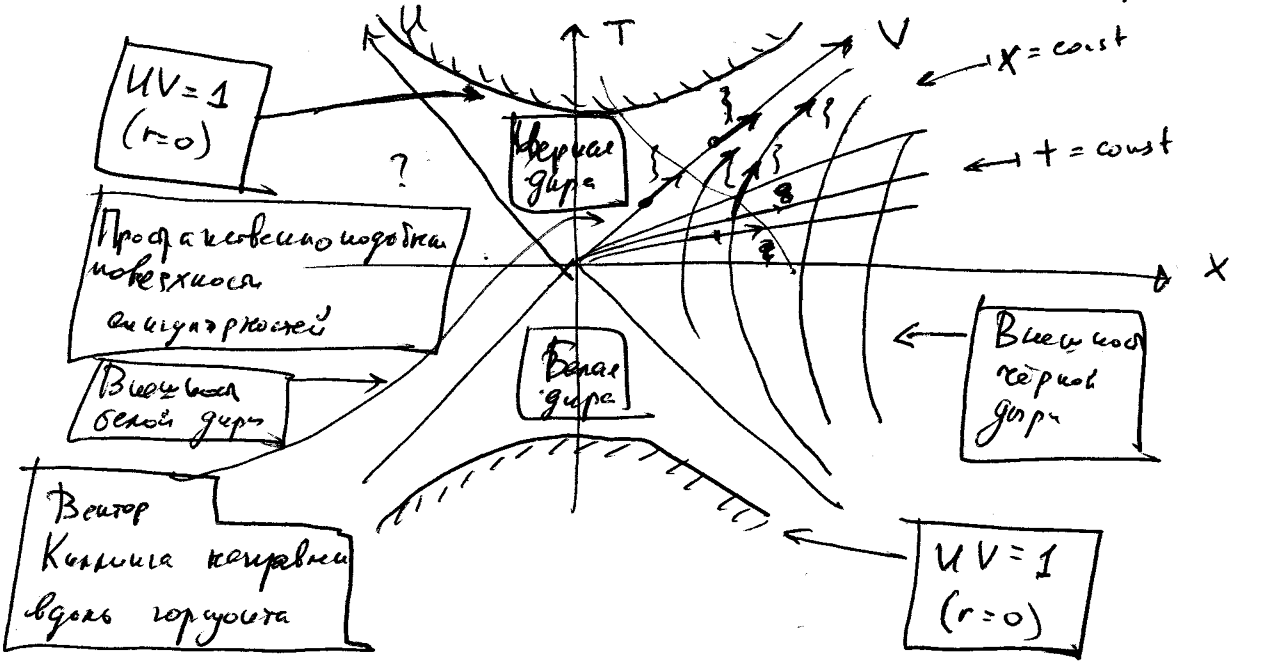
$$\boxed{\left(1-\frac{2M}{r}\right) = \frac{2M}{r}e^{-r/2M}e^{\frac{v-u}{4M}}}$$

$$\boxed{ds^2 = \underbrace{\frac{32M^3}{r}e^{-r/2M}}_{\text{Несингулярн при } r=2M}\,dU\,dV}$$

$$e^{\frac{v}{4M}}dv = 4M\,dV \Rightarrow \boxed{V = e^{v/4M}} = e^{(t+r_*)/4M}$$

$$e^{-\frac{u}{4M}}du = 4M\,dU \Rightarrow \boxed{U = -e^{-u/4M}} = -e^{-(t-r_*)/4M}$$

$$\boxed{ds^2 = \frac{32M^3}{r}e^{-\frac{r}{2M}}\left(dT^2-dX^2\right) - r^2 d\Omega^2}$$



$$2t = u + v \qquad \frac{V}{v} = e^{\frac{v+u}{4M}} = e^{\frac{t}{2M}}$$

$$2r_* = v - u \qquad UV = -e^{\frac{v-u}{4M}} = -e^{\frac{r_*}{2M}} = -e^{\frac{r}{2M}}\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{V}{v} &= e^{t/2M} \\ UV &= -e^{\frac{r}{2M}}\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \end{aligned}}$$

$\boxed{r=0}$ — Настоящая сингулярность. Там $\boxed{R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda} = \infty}$

$\boxed{UV = 1} \Rightarrow$ Сингулярность произойдёт в будущем!

<u>Заметим!</u> Радиальные светоподобные геодезические по-прежнему $\begin{pmatrix} u = const \\ v = const \end{pmatrix}$

<u>Задача</u> Показать, что светоподобные геодезические достигают сингулярности при конечном значении аффинного параметра.

$$E = (U\xi) = U^0\left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \frac{dt}{d\lambda}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

$$d\lambda = \frac{1}{E}\int \overbrace{dt}^{\frac{dv}{2}} \underbrace{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}_{\frac{2M}{r} e^{-r/2M} e^{\frac{(v-u)}{4M}}}\Bigg|_{u=const} = \frac{1}{2E}\int dv\, e^{\frac{(v-u)}{4M}} \frac{2M}{r} e^{-r/2M}$$

$$\boxed{V = e^{v/4M}}$$

$$\lambda = \frac{e^{-u/4M}}{2E}\, 2M \cdot 4M \int dV \underbrace{\frac{2M}{r} e^{-r/2M}}_{}$$

Регулярна ф-ция ограничена

Кроме $\boxed{r=0}$

$\lambda = Reg + \#\int \frac{dV}{r}$

$$UV = +\left(1-\frac{r}{2M}\right)\left(1+\frac{r}{2M}+\frac{r^2}{8M^2}\right) = \left(1-\frac{r^2}{4M^2}+\frac{r^2}{8M^2}\right)$$

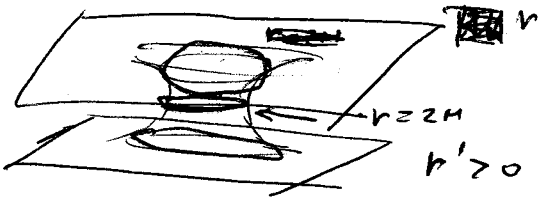
Const вдоль геодезической

$$\boxed{r = 2\sqrt{2}\,M\,(1-UV)^{1/2}}$$

$$\lambda = Reg + \#\int \frac{dV}{\underbrace{\sqrt{1/U - V}}_{\#\sqrt{1/U-V}}} = \text{finite.} \quad \text{ok}$$

Целых 3 новых области

$\boxed{T=0}$



$\boxed{\text{Черная дыра объединяет 2 симметричных пространства}}$

Нельзя ходить $\boxed{\text{из 1-го в другое!}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{I – Внешность ч. дыры} \\ \text{II – Черная дыра} \\ \text{III – Белая дыра} \\ \text{IV – Внешность белой дыры} \end{array}}$$

Чему верить? Это – статическое решение, но:

чтобы создать это решение, мы должны

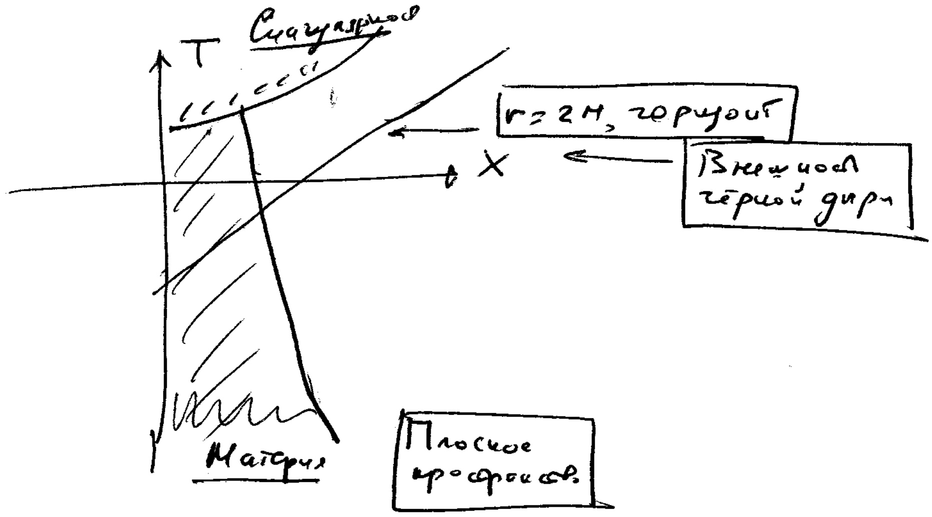
провести коллапс

$\Downarrow$

Гладкие начальные условия

$\Downarrow$

$\boxed{\text{Нет белой дыры и её внешности.}}$


T
X
r=2M, горизонт
Внешность чёрной дыры
Материя
Плоское

Координаты Леметра

(Падающих наблюдателей)

Гидродинамический аналог

$$\boxed{ds^2 = -\left(dr - v(r)\,d\tau\right)^2 - r^2 d\Omega^2 + d\tau^2}$$

$$= -dr^2 + 2v\,dr\,d\tau - d\tau^2 v^2 + d\tau^2 - r^2 d\Omega^2 =$$

$$= d\tau^2(1-v^2) + 2v\,dr\,d\tau - dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

$$\boxed{\tau = t + f(r)}$$

$$= \left(dt^2 + 2f'\,dt\,dr + (f')^2 dr^2\right)(1-v^2) + 2v\left(dt + f'\,dr\right)dr -$$

$$- dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

$$\cancel{2} f'(1-v^2) + \cancel{2}v = 0$$

$$\boxed{f' = -\frac{v}{1-v^2}}$$

$$= dt^2(1-v^2) + dr^2\left((f')^2(1-v^2) - 1 + 2vf'\right) - r^2 d\Omega^2$$

$$+\frac{v^2}{1-v^2} \qquad \frac{-1+v^2}{1-v^2} \qquad -\frac{2v^2}{1-v^2}$$

$$= dt^2(1-v^2) + \frac{dr^2}{1-v^2} - r^2 d\Omega^2$$

$$\boxed{v = -\sqrt{\frac{2M}{r}}} \qquad \boxed{f' = +\frac{\sqrt{2M/r}}{1-\frac{2M}{r}}}$$

$$\frac{df}{dr} = + \frac{\sqrt{2Mr}}{r-2M}$$

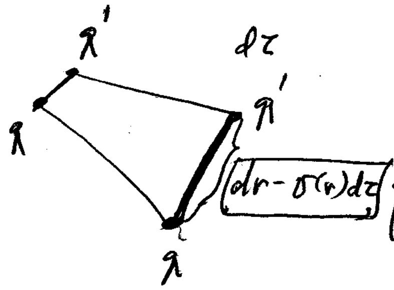
$$f = +\int dr \frac{\sqrt{2Mr}}{r-2M} = -2\sqrt{2M} \int d\sqrt{r} \underbrace{\left(\frac{r-2M+2M}{r-2M}\right)}_{1 + \frac{2M}{r-2M}}$$

$$= -2\sqrt{2M}\left(\sqrt{r} - \sqrt{\frac{M}{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{r}+\sqrt{2M}}{\sqrt{r}-\sqrt{2M}}\right)\right)$$

$$f' = -2\sqrt{2M}\left(\frac{1}{2\sqrt{r}}\right)\underbrace{\left(1 - \sqrt{\frac{M}{2}}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{r}+\sqrt{2M}} - \frac{1}{\sqrt{r}-\sqrt{2M}}\right)}_{\frac{\cancel{\sqrt{r}} - 2\sqrt{2M} - \cancel{\sqrt{r}} - \cancel{\sqrt{2M}}}{r-2M}}\right)}_{1 + \frac{2M}{r-2M} = \frac{r}{r-2M}}$$

$$= \underbrace{+ \frac{\sqrt{2M}}{\sqrt{r}} \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}}$$ ok

$$\boxed{f(r) = + 4M\left(\sqrt{\frac{r}{2M}} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{r}+\sqrt{2M}}{\sqrt{r}-\sqrt{2M}}\right)\right)}$$



$\underline{V(r)}$ — скорость "$\underline{\text{среза}}$"

$\underline{dr - v(r)\,d\tau}$ — $\underline{\text{Расстояние между наблюдателями}}$

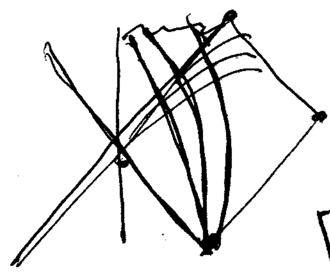
$d\tau$ — Время.

$$\underbrace{E = g_{00}\,\dot{t} = \frac{dt}{d\tau}\cdot\left(1-\frac{2M}{r}\right)}$$

$$-\sqrt{\frac{2M}{r}}$$

$$\boxed{\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{1-\frac{2M}{r}}} = \frac{1}{1-\frac{2M}{r}} \qquad \frac{dt}{dr}\cdot\frac{dr}{d\tau} = \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}$$

$$\underbrace{\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2}_{\frac{E^2}{1-\frac{2M}{r}}} - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2\frac{1}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)} = 1$$



Геодезические

$$\cancel{E^2} - \underbrace{\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 1 - \frac{2M}{r} - E^2}$$

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm\sqrt{E^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)}$$

$$\boxed{\frac{d\tau}{dr} = \frac{1}{v(r)}} \quad \text{ok}$$

$$\underbrace{\frac{d\tau}{dr} = -\frac{1}{\sqrt{E^2 - 1 + \frac{2M}{r}}}}$$

Собственное время наблюдателя

$$\boxed{E=1} \Rightarrow \boxed{\frac{d\tau}{dr} = \sqrt{r/2M}} \Rightarrow \boxed{\tau_{(r)} = \tau_0 + \frac{r^{3/2}}{3M}}$$

$$\boxed{\frac{dr}{d\tau} = v} \Rightarrow \boxed{ds^2 = d\tau^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{dr}{d\tau}\right) = -\left(\sqrt{\frac{r}{2M}}\right)^{-1}\frac{d}{dr}$$

$$\boxed{t(r) = -f(r) + t_0}$$

$$\boxed{\tilde{\tau} = t + f(r) = t_0} = \text{const}$$

$$\boxed{\frac{dt}{dr} = -\frac{\sqrt{r/2M}}{1-\frac{2M}{r}}} \quad \text{ok} \quad =$$

$$-\sqrt{2M/r}\;\sqrt{r/2M}$$

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{\sqrt{r/2M}}{1-\frac{2M}{r}} = -\sqrt{r/2M}\left(\underbrace{1+\frac{2M/r}{1-\frac{2M}{r}}}_{\frac{1-\cancel{\frac{2M}{r}}+\cancel{\frac{2M}{r}}}{1-\frac{2M}{r}}}\right)$$

$$= \underbrace{-\sqrt{r/2M}}_{\frac{d\tau}{dr}} \underbrace{-\frac{\sqrt{2M/r}}{1-2M/r}}_{-f'}$$

$$\boxed{t+f(r)=\tau}$$