ОТО - 1

① Обозначения

$$\boxed{\hbar = k_B = c = G_N = 1}$$

$$\boxed{\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)}$$

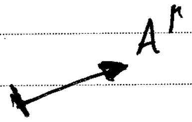
② Векторные поля

$$A^\mu(x) \longleftrightarrow \boxed{A^\mu \partial_\mu = \hat{A}} \leftarrow \text{Оператор дифференцирования}$$

$$B_\mu(x) \longleftrightarrow \boxed{B_\mu dx^\mu = \hat{B}} - \text{Дифференциальные формы}$$

$$\boxed{\hat{A} f(x) = A^\mu \partial_\mu f(x)} \leftarrow \text{Производная по направлению } A^\mu$$

$$\simeq [f(x^\mu + A^\mu \Delta x) - f(x)]/\Delta x$$

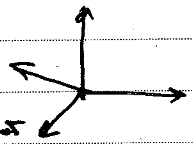


$[\hat{A}\hat{B}]$ - Коммутатор

Д/з Показать, что коммутатор 2-х векторных полей - векторное поле. Вычислить по координатам

$$\boxed{[\hat{A}\hat{B}]^\sigma := A^\rho \partial_\rho B^\sigma - B^\rho \partial_\rho A^\sigma}$$

Пусть у нас есть 4 [redacted] векторных поля Y_a^μ - Образуют базис в каждой точке



Тогда

$$\boxed{[\hat{Y}_a \hat{Y}_b] = C_{ab}^{c} \hat{Y}_c}$$, т.е. они образуют алгебру Ли.

Структурные константы

Д/з. Вычислить структурные константы.

Итак мы выучили, что векторное поле - это оператор дифференцирования или генератор сдвига $x^\mu \to x^\mu + A^\mu \Delta x$

③ Ковариантное пр-ная

$$\boxed{\begin{aligned} D_\mu A_\nu &= \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} A_\lambda \\ D_\mu A^\nu &= \partial_\mu A^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} A^\lambda \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} D_\rho g_{\lambda\nu} &= 0 \\ \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right)}$$

$$[AB]^\mu = A^\nu D_\nu B^\mu - B^\nu D_\nu A^\mu = \underbrace{A^\nu \partial_\nu B^\mu - B^\nu \partial_\nu A^\mu}_{[AB]^\mu} +$$

$$+ \cancel{A^\nu \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} B^\lambda - B^\nu \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} A^\lambda} \qquad \text{ok}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} D_\mu D_\nu \omega_\lambda - D_\nu D_\mu \omega_\lambda &= [D_\mu, D_\nu]\,\omega_\lambda = R_{\mu\nu\lambda}{}^{\varkappa}\,\omega_\varkappa \\ [D_\mu, D_\nu]\,\omega^\lambda &= - R_{\mu\nu}{}^{\lambda}{}_{\varkappa}\,\omega^\varkappa \end{aligned}}$$

$$D_\mu D_\nu \omega_\lambda - D_\nu D_\mu \omega_\lambda =$$

$$= \partial_\mu D_\nu\omega_\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^{\varkappa} D_\varkappa \omega_\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^{\varkappa} D_\nu \omega_\varkappa - \partial_\nu D_\mu \omega_\lambda +$$

$$+ \Gamma_{\nu\mu}^{\varkappa} D_\varkappa \omega_\lambda + \Gamma_{\nu\lambda}^{\varkappa} D_\mu \omega_\varkappa =$$

$$= \cancel{\partial_\mu \partial_\nu \omega_\lambda} - \underline{\partial_\mu\left(\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\right)\omega_\rho} - \cancel{\partial_\mu \omega_\rho \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}} -$$

$$- \cancel{\Gamma_{\mu\lambda}^{\varkappa} \partial_\nu \omega_\varkappa} + \underline{\Gamma_{\mu\lambda}^{\varkappa} \Gamma_{\nu\varkappa}^{\rho} \omega_\rho} - \cancel{\Gamma_{\mu\nu}^{\varkappa} \partial_\varkappa \omega_\lambda} + \underline{\Gamma_{\mu\nu}^{\varkappa} \Gamma_{\varkappa\lambda}^{\rho} \omega_\rho}$$

$$- \cancel{\partial_\nu \partial_\mu \omega_\lambda} + \underline{\left(\partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\right)\omega_\rho} + \cancel{\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \partial_\nu \omega_\rho} +$$

$$+ \cancel{\Gamma_{\nu\mu}^{\varkappa} \partial_\varkappa \omega_\lambda} - \underline{\Gamma_{\nu\mu}^{\varkappa} \Gamma_{\varkappa\lambda}^{\rho} \omega_\rho} + \cancel{\Gamma_{\nu\lambda}^{\varkappa} \partial_\mu \omega_\varkappa} -$$

$$- \Gamma_{\nu\lambda}^{\varkappa} \Gamma_{\mu\varkappa}^{\rho} \omega_\rho$$

attache

$$R_{\mu\nu\lambda}{}^{\rho} = \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} - \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}\Gamma^{\rho}_{\nu\varkappa} + \cancel{\Gamma^{\varkappa}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\varkappa\lambda}}$$

$$- \cancel{\Gamma^{\varkappa}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\varkappa\lambda}} - \Gamma^{\varkappa}_{\nu\lambda}\Gamma^{\rho}_{\mu\varkappa}$$

$$\boxed{R_{\mu\nu\lambda}{}^{\rho} = \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} - \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}\Gamma^{\rho}_{\nu\varkappa} - \Gamma^{\varkappa}_{\nu\lambda}\Gamma^{\rho}_{\mu\varkappa}}$$ ok

$$R_{\mu\lambda} = R_{\mu\nu\lambda}{}^{\nu} = \partial_\nu \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} - \partial_\mu \Gamma^{\nu}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}\Gamma^{\nu}_{\nu\varkappa} - \Gamma^{\varkappa}_{\nu\lambda}\Gamma^{\nu}_{\varkappa\mu}$$

---

4 Геодезическая

Минимальная длина

$$\boxed{S = -m\int ds} = -m\int\sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} =$$

$\boxed{l = \min}$

$$= -m\int ds\sqrt{\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}g_{\mu\nu}} -$$

$$\delta S = -m\int ds\,\frac{1}{2}\,\frac{2\frac{dx^\mu}{ds}\left(\frac{d}{ds}\delta x^\nu\, g_{\mu\nu}\right) + \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\partial_\varkappa g_{\mu\nu}\delta}{\sqrt{\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}g_{\mu\nu}}}$$

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{\overbrace{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}}^{u_\nu}}{\sqrt{\dots}\to 1}\right) + \frac{1}{2}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\varkappa}{ds}\partial_\nu g_{\mu\varkappa} = 0$$

$$\boxed{u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}}$$

$$D\, u_\nu = 0 = \frac{du_\nu}{ds} - u^\mu\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}u_\lambda =$$

$$\boxed{u^\mu\nabla_\mu u_\varkappa = 0}$$

$$= \frac{du_\nu}{ds} - u^\mu u_\varkappa\,\frac{1}{2}g^{\lambda\varkappa}\left(\cancel{\partial_\mu g_{\nu\varkappa}} + \partial_\nu g_{\mu\varkappa} - \cancel{\partial_\varkappa g_{\mu\nu}}\right)$$

ok

$$\boxed{S_G = -\frac{1}{16\pi G_N} \int R\sqrt{-g}\, d^4x} = -\int R\sqrt{-g}\, d^4x$$

6) Ур-ние Эйнштейна

$$\delta S_G = -\tfrac{1}{2}\int \left(R_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} - \sqrt{-g}\, \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu} R \right)$$

$$\delta S_M = \int \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}\, \delta g^{\mu\nu}\, d^4x$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = + \underbrace{\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}}_{\tfrac{1}{2} T_{\mu\nu}}} \quad 8\pi$$

$$\boxed{T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}}$$

в) Производная Ли

$\xi^\mu(x)$ — Поле единич

$x^\mu \mapsto x^\mu + \xi^\mu$

$$f(x) \mapsto f'(x') = f(x)$$

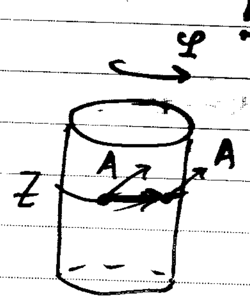
$$f'(x) = \underbrace{f(x) - \xi^\mu \partial_\mu f(x)}_{} =$$

$$= f(x) - \mathcal{L}_\xi f(x)$$

$$\boxed{\mathcal{L}_\xi f(x) = \xi^\mu \partial_\mu f(x)}$$

attache

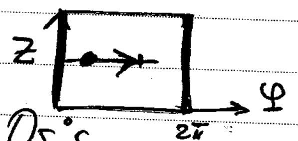
Производная Ли



$f(x)$ — ф-ция, инв. относительно преобразования

$$\boxed{\varphi \mapsto \varphi+\Delta\varphi}$$

$$\Updownarrow$$



$$\boxed{\partial_\varphi f = 0} \qquad \boxed{\xi = \frac{\partial}{\partial\varphi}}$$

Обобщим: $\boxed{x^\mu \mapsto x^\mu + \xi^\mu(x)}$

$$f(x^\mu+\xi^\mu) = f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\xi^\mu \nabla_\mu f = 0 \quad = \xi^\mu \partial_\mu f}$$

Введём преобразование координат

$$\boxed{y^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)}$$

В этих координатах $f'(y) = f(x) \Rightarrow \boxed{f'(x) = f(x-\xi)}$

Мы преобразовали координаты, и ничего не изменилось

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = f(x) \Leftrightarrow \boxed{\xi^\mu \partial_\mu f = 0}$$

Вектор: ~~Координаты~~ Симметричен если

Координаты вектора в повернутой системе координат совпадают с координатами в нормальной.

$$\boxed{y^\mu = x^\mu + \xi^\mu}$$

$$A'^\mu(y) = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x) = \left(\delta^\mu_\nu + \partial_\nu \xi^\mu\right) A^\nu(x)$$

$$\boxed{A'^\mu(y) = A^\mu(y)}$$

$$\Downarrow$$

$$A^\mu(x) + \xi^\nu \partial_\nu A^\mu = A^\mu(x) + \partial_\nu \xi^\mu A^\nu$$

$$\boxed{\mathcal{L}_\xi A^\mu = 0} \iff \boxed{\xi^\nu \partial_\nu A_\mu - A^\nu \partial_\nu \xi^\mu = 0}$$

$$\boxed{\mathcal{L}_\xi A^\mu = \xi^\nu \partial_\nu A^\mu - A^\nu \partial_\nu \xi^\mu}$$

Контравариантный вектор, Индекс вращается в другую сторону!

$$A'_\mu(y) = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} A_\nu(x) = \underbrace{A_\mu(x)} - \partial_\mu \xi^\nu A_\nu(x)$$

$$\|$$

$$\underbrace{A_\mu(x)} + \xi^\nu \partial_\nu A_\mu$$

$$\boxed{\xi^\nu \partial_\nu A_\mu + A_\nu \partial_\mu \xi^\nu = 0}$$

В общем случае

$$\boxed{\mathcal{L}_\xi T^\mu_\nu = \xi^\lambda \partial_\lambda T^\mu_\nu - T^\lambda_\nu \partial_\lambda \xi^\mu + T^\mu_\lambda \partial_\nu \xi^\lambda}$$

$\boxed{\text{Д/з}}$ Показать, что

$$\boxed{\mathcal{L}_\xi T^\mu_\nu = \xi^\lambda D_\lambda T^\mu_\nu - T^\lambda_\nu D_\lambda \xi^\mu + T^\mu_\lambda D_\nu \xi^\lambda}$$

$$\boxed{\mathcal{L}_\xi A^\mu = \xi^\lambda D_\lambda A^\mu - A^\lambda D_\lambda \xi^\mu}$$

$$\|$$

$$\xi^\lambda \partial_\lambda A^\mu - A^\lambda \partial_\lambda \xi^\mu + \cancel{\xi^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\nu} - \cancel{A^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \xi^\nu}$$

$$\xi^\lambda \partial_\lambda T^\mu_\nu - T^\lambda_\nu \partial_\lambda \xi^\mu + T^\mu_\lambda \partial_\nu \xi^\lambda$$

$$+ \cancel{\xi^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\varkappa} T^\varkappa_\nu} - \cancel{\xi^\lambda \Gamma^\varkappa_{\lambda\nu} T^\mu_\varkappa} - \cancel{T^\lambda_\nu \Gamma^\mu_{\lambda\varkappa} \xi^\varkappa} + \cancel{T^\mu_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\varkappa} \xi^\varkappa}$$

ok

Вектор Киллинга

$$\boxed{\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0} \iff \boxed{D_\mu \xi_\nu + D_\nu \xi_\mu = 0}$$

$\boxed{Д/з}$ Показать, что коммутатор векторов Киллинга - вектор Киллинга

⇓

$\boxed{\text{Векторы Киллинга образуют алгебру Ли}}$

Полезная ф-ла.

$$[D_\mu D_\nu]\xi_\lambda = D_\mu D_\nu \xi_\lambda - \underbrace{D_\nu D_\mu \xi_\lambda}_{\substack{\Downarrow \\ D_\nu D_\lambda \xi_\mu}} = R_{\mu\nu\lambda}{}^{\varkappa}\xi_\varkappa$$

Циклически

$$\begin{cases} D_\mu D_\nu \xi_\lambda + D_\nu D_\lambda \xi_\mu = R_{\mu\nu\lambda}{}^{\varkappa}\xi_\varkappa \\ D_\nu D_\lambda \xi_\mu + D_\lambda D_\mu \xi_\nu = R_{\nu\lambda\mu\varkappa}\xi^\varkappa \quad (-1) \\ D_\lambda D_\mu \xi_\nu + D_\mu D_\nu \xi_\lambda = R_{\lambda\mu\nu\varkappa}\xi^\varkappa \end{cases}$$

$$2 D_\mu D_\nu \xi_\lambda = \xi^\varkappa \left(\cancel{R_{\mu\nu\lambda\varkappa}} - 2R_{\nu\lambda\mu\varkappa} + \cancel{R_{\lambda\mu\nu\varkappa}} + \cancel{R_{\nu\lambda\mu\varkappa}} \right)$$

$$\boxed{D_\mu D_\nu \xi_\lambda = - R_{\nu\lambda\mu\varkappa}\xi^\varkappa}$$

Решение $\quad [AB]^\mu = A^\nu D_\nu B^\mu - (A \leftrightarrow B)$

$$D_\mu \left(A^\lambda D_\lambda B_\nu \right) + D_\nu \left(A^\lambda D_\lambda B_\mu \right) - (A \leftrightarrow B) = 0$$

$$-(A\leftrightarrow B) + \underbrace{D_\mu A_\lambda D_\lambda B_\nu}_{\substack{\Downarrow \\ \cancel{- D_\lambda A_\mu D_\lambda B_\nu}}} + \underbrace{A_\lambda D_\mu D_\lambda B_\nu} + \underbrace{D_\nu A_\lambda D_\lambda B_\mu}_{\substack{\Downarrow \\ \cancel{- D_\lambda A_\nu D_\lambda B_\mu}}} + A_\lambda D_\nu D_\lambda B_\mu = 0$$

$$0 = \cancel{A_\lambda R_{\lambda\nu\mu\varkappa} B^\varkappa} + \cancel{A_\lambda R_{\lambda\mu\nu\varkappa} B^\varkappa} - (A \leftrightarrow B)$$

ok

attache

$\boxed{\text{Следствие конечной ф-лы}}$

$\boxed{\xi_\mu}$ полностью определен $\boxed{\begin{matrix}\xi_\mu(P)\\ D_\mu \xi_\nu(P)\end{matrix}}$ ← (Антисимметрично)

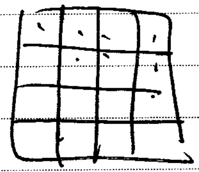
$\boxed{\text{В некоторой точке } P}$

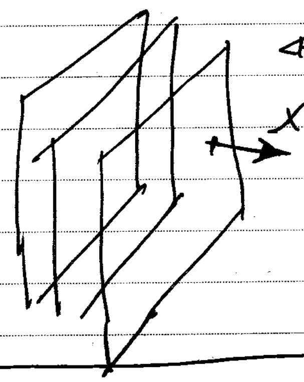
Действительно, как только эти числа известны, мы знаем все производные ξ в некоторой точке $\Rightarrow$ Разложение Тейлора.

Сколько максимум?
$$\begin{cases} \xi_\mu(P) - 4 \text{ шт} \\ D_\mu \xi_\nu - A/S \Rightarrow 6 \text{ шт}\end{cases}$$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{Максимум 10 векторов Киллинга}}$





← Пусть есть семейство гиперповерхностей, такая, что $X \perp$ этим гиперповерхностям

$\boxed{\text{Теорему Фробениуса не будем}}$

$\boxed{Д/З}$ Найти вектора Киллинга, ~~[illegible]~~ соответствующие вращениям $\mathbb{R}^3$. Показать, что они составляют алгебру $so(3)$

Решение, $\boxed{l_{(i)} = \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \partial_k}$

$$l_{(i)k} = \varepsilon_{ijk}\, x_j$$

$$\partial_i\, l_{j(k)} + \partial_j\, l_{i(k)} = 0$$

$$\cancel{\partial}\, \varepsilon_{kij}\, \cancel{x} + \cancel{\partial_j}\, \varepsilon_{kji}\, \cancel{x} = 0 \quad ok$$

$$[l_{(i)}, l_{(j)}] = [\varepsilon_{imn}\, x_m\, \partial_n, \varepsilon_{jrf}\, x_r\, \partial_f] =$$

$$= -\varepsilon_{imn}\, \varepsilon_{jnf}\, x_m\, \partial_f + \varepsilon_{imn}\, \varepsilon_{jrm}\, x_r\, \partial_n$$

$$= -x_u \partial_f \left(\delta_{ij} \delta_{uf} - \delta_{if} \delta_{uj} \right) + x_r \partial_u \left(\delta_{ij} \delta_{ur} - \delta_{ir} \delta_{uj} \right) =$$

$$= \cancel{-\delta_{ij} x_f \partial_f} + x_j \partial_i + \cancel{\delta_{ij} x_r \partial_r} - x_i \partial_j$$

$$= x_j \partial_i - x_i \partial_j = - \varepsilon_{ijk} L_{(k)} \quad \text{ok}$$

$$\varepsilon_{ijk} l_{(k)} = \underbrace{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kfr}} x_f \partial_r =$$

$$= x_f \partial_r \left(\delta_{if} \delta_{jr} - \delta_{ir} \delta_{jf} \right) =$$

$$= x_i \partial_j - x_j \partial_i$$

Зачем нужен вектор Киллинга?

Решаю!
- → Симметричная звезда.
- → Законы сохранения

$\boxed{\xi_\mu(x)}$ – Вектор Киллинга

$\boxed{(u^\mu \xi_\mu) = I \text{ – Сохранение вдоль траектории}}$

$$u^\lambda D_\lambda I = u^\lambda D_\lambda (u^\mu \xi_\mu) =$$

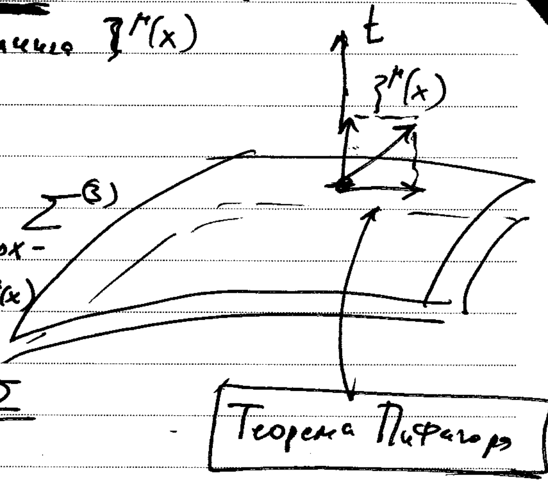
$$= \underbrace{(u^\lambda D_\lambda u^\mu)}_{0} + u^\lambda u^\mu \underbrace{D_\lambda \xi_\mu}_{AS} = 0$$

$\Downarrow$

Каждая симметрия соответствует закону сохранения

Статически-симметричное пр-во-время

<u>Определение</u> Пространство-время <u>стационарно</u> если $\exists$ времениподобный вектор Киллинга $\xi^\mu(x)$



<u>Определение</u> Пространство-время <u>статично</u> если оно стационарно, и вдобавок есть набор 3D-гиперповерхностей, которые ортогональны к полю $\xi^\mu(x)$

Пусть $h_{ij}(\vec{x}^i,t)$ - <u>Координаты на Σ</u>

$$\boxed{t \text{ бежит вдоль } \xi^\mu}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{ds^2 = dt^2 - h_{ij}(\vec{x}^i,t)\, dx^i dx^j}$$

$$\boxed{\xi^\mu = \frac{\partial}{\partial t}} = (1,0,0,0)$$

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0 = \xi^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \cancel{g\,\partial\xi} + \ldots = \partial_t g_{\mu\nu} = 0$$

$$\Downarrow$$

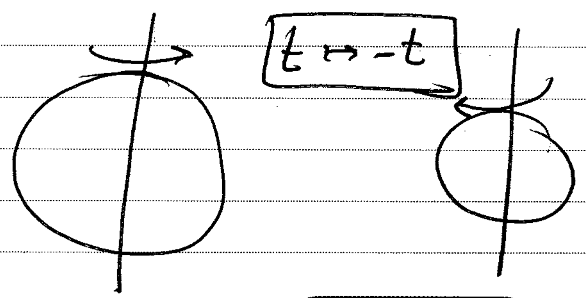
$$\boxed{h_{ij} \text{ не зависит от } t}$$

Для <u>Стационарного</u> (но нестатического) пространства-времени с необходимостью должны присутствовать члены $\boxed{dx^i dt}$

$\boxed{\text{Симметрия } t \leftrightarrow -t}$ <u>появилась!</u>

$$\Downarrow$$

<u>Наша звезда не вращается!</u>



> Вращающаяся звезда описывается стационарной, но не статической метрикой!

$\boxed{SO(3)}$ – Изоморфизм пр-ва – времени

$\boxed{Д/3}$ Доказать, что метрика

$$\boxed{ds^2 = R^2\left(d\theta^2 - \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)}$$

Единственная метрика, инв. относительно симметрии $SO(3)$

Решение

$$\begin{cases} [l_1, l_2] = \varepsilon_{123}\, l_3 = l_3 \\ [l_1\, l_3] = -\cancel{\varepsilon_{132}}\, l_2 \\ [l_2\, l_3] = \cancel{\varepsilon_{231}}\, l_1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} l_+ &= l_1 + i l_2 \\ l_- &= l_1 - i l_2 \end{aligned}}$$

$$[l_+, l_z] = \overbrace{[l_1, l_z]}^{-l_2} + i\,\overbrace{[l_2, l_z]}^{l_1} = -l_2 + i l_1 = +i l_+$$

$$[l_-, l_z] = \overbrace{[l_1, l_z]}^{-l_2} - i\,\overbrace{[l_2, l_z]}^{l_1} = -l_2 - i l_1 = -i l_-$$

$$[l_+, l_-] = [l_1 + i l_2, l_1 - i l_2] = -i\,\underbrace{[l_1\, l_2]}_{l_3} + i\,\cancel{[l_2\, l_1]} = -2i\, l_3$$

$$\boxed{\begin{aligned} [l_+\, l_-] &= -2i\, l_3 \\ [l_+\, l_z] &= i\, l_+ \\ [l_-\, l_z] &= -i\, l_- \end{aligned}}$$

$$\boxed{l_z = \frac{\partial}{\partial\varphi}}$$

$$ds^2 = h_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = h_\theta\, d\theta^2 + \cancel{2h_{\theta\varphi}\, d\theta\, d\varphi} + h_\varphi\, d\varphi^2$$

$\boxed{l_z \text{ – Вектор Киллинга}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Всё не зависит от } \varphi}$

Выбираем $\theta \perp \varphi$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{ds^2 = d\theta^2 + h_\varphi\, d\varphi^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} l_+ &= e^{-\varphi i}\left(a_1 \partial_\theta + a_2 \partial_\varphi\right) \\ l_- &= e^{i\varphi}\left(b_1 \partial_\theta + b_2 \partial_\varphi\right) \end{aligned}}$$

$$l^\beta \partial_\beta h_{\alpha\gamma} + h_{\alpha\varkappa}\partial_\gamma l^\varkappa + h_{\gamma\varkappa}\partial_\alpha l^\varkappa = 0$$

$$\cancel{l_-^\theta \partial_\theta h_{12}} \to 0 + \cancel{h_{11}} \overset{(+i)}{} l_-^1 + \underbrace{h_{22}}_{2} \partial_1 l_-^2$$

$$\boxed{h_\varphi \partial_1 b_2 + i b_1 = 0}$$

$$\cancel{l_-^\theta \partial_\theta h_{11}} \to 0 + 2h_{11}\partial_1 l_-^1 + \ldots = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{b_1 = \text{const}} = 1$$

$$h_\varphi \partial_1 b_2 = -i$$

$$\boxed{b_2 = -i\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta'}{h_\varphi(\theta')}}$$

$$l_-^\theta \partial_\theta h_\varphi + 2h_{22}\partial_2 l_-^2 = 0$$

$$\partial_\theta h_\varphi + 2h_\varphi (i) b_2 = 0$$

$$\frac{\partial_\theta h_\varphi}{h_\varphi} + 2\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta'}{h_\varphi(\theta')} = 0$$

$$\cancel{\frac{1}{h_\varphi} + \frac{\partial_\theta^2 h_\varphi}{h_\varphi} - \left(\frac{\partial_\theta h_\varphi}{h_\varphi}\right)^2 = 0}$$

$$\boxed{\Psi = \ln h_\varphi}$$

$$\boxed{\partial_\theta^2 \Psi + 2 e^{-\Psi} = 0}$$

$$\boxed{E = \frac{(\partial_\theta \Psi)^2}{2} - 2 e^{-\Psi}} = \text{Const}$$

$$\partial_\theta \Psi = \sqrt{2(E + 2 e^{-\Psi})}$$

$$\boxed{\int \frac{d\Psi}{\sqrt{2(E + 2 e^{-\Psi})}} = \theta - \theta_1}$$

$$\boxed{a_1 = 1} \qquad \boxed{a_2 = +i \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta'}{h_\varphi(\theta')}}$$

$$[l_+ l_-] = \left[e^{-i\varphi}(\partial_\theta + a_2 \partial_\varphi),\ e^{i\varphi}(\partial_\theta + b_2 \partial_\varphi)\right]$$

$$= (\partial_\theta b_2)\partial_\varphi - (\partial_\theta a_2)\partial_\varphi + i a_2 (\cancel{\partial_\theta} + b_2 \partial_\varphi) +$$

$$+ i b_2 (\cancel{\partial_\theta} + a_2 \partial_\varphi) =$$

$$= \partial_\varphi \left(\underline{\partial_\theta b_2 - \partial_\theta a_2 + 2i a_2 b_2} \right) = \partial_\varphi \cdot \text{const}$$

$$\boxed{-\frac{\cancel{2i}}{h_\varphi} + \cancel{2i} \left(\int^\theta \frac{d\theta'}{h_\varphi} \right)^2 = \text{const}}$$

$$\underline{-\frac{1}{\sin^2\theta} + ctg^2\theta} = \text{const}$$

ok.

$$\boxed{\int \frac{d\theta'}{\sin^2\theta} = ctg\,\theta}$$

attache

$$\int \frac{d\psi\, e^{\psi/2}}{\sqrt{2(E e^{\psi} + 2)}} = \theta - \theta_1$$

$$\boxed{z = e^{\psi/2} = \sqrt{h_{\varphi}}}$$

$$\int \frac{\left(\sqrt{\frac{E}{2}}\, dz\right) 2\sqrt{\frac{2}{E}}}{2\sqrt{\frac{E}{2} z^2 + 1}} = \theta - \theta_1$$

- $\operatorname{arcsh} \psi' = \dfrac{1}{\operatorname{sh}'\psi} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}\psi} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\psi}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\psi^2}}$

$$\sqrt{\frac{2}{E}}\, \operatorname{arcsh}\left(\sqrt{\frac{E}{2}}\sqrt{h_{\varphi\varphi}}\right) = \theta - \theta_1$$

$$\boxed{\sqrt{h_{\varphi\varphi}} = \sqrt{2/E}\, \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{E}{2}}(\theta - \theta_1)\right)} \qquad \boxed{E>0}$$

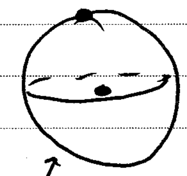
$$\boxed{E<0} \qquad \boxed{\sqrt{h_{\varphi\varphi}} = \cancel{\sqrt{2/|E|}}\, \sin\left(\sqrt{E/2}\,(\theta \ldots)\right)}$$

Переопр. φ

$$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2} = \frac{2}{E}\frac{1}{\operatorname{sh}^2} \Rightarrow \boxed{E<2}$$ ah

$\boxed{\text{II решение – гипербола!}}$

Итак, Единственная $SO(3)$ - симметричная двумерная метрика - метрика сферы.



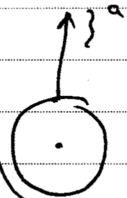
$$\boxed{ds^2 = R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)}$$

Физический смысл R:

$$\boxed{A_{S^2} = 4\pi R^2}$$

Орбита одной точки при действии группы $SO(3)$

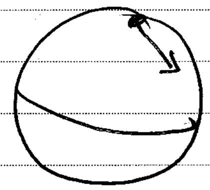
Итак, всё 4D пространство расслоено на сферы.



ξ^a

Если ξ^a - Единственный, то его проекция на сферу $= 0$

Иначе мы его повернём и будет ещё один вектор Киллинга.



$\Downarrow$

Все сферы лежат в поверхностях Σ

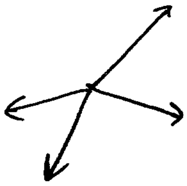
Вводим на Σ координаты $\boxed{(\theta, \varphi)}$ и $\boxed{r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}}$

$\Downarrow$

$$\boxed{ds^2 = -f(r)\,dt^2 + h(r)\,dr^2 + r^2\, d\Omega_2^2}$$

Самая общая статическая метрика

Тетрады



$e^a_\mu(x)$ — Ортонормированный базис в каждой точке

$$\boxed{e^a_\mu(x)\, g^{\mu\nu}(x)\, e^b_\nu = \eta^{ab}}$$

$$e^a_\mu \eta_{ab} e^b_\nu = \underbrace{e^a_\mu e_{\varkappa a}}_{g_{\mu\varkappa}} g^{\varkappa\delta} \underbrace{e_{\delta b} e^b_\nu}_{g_{\delta\nu}} = g_{\mu\nu}$$

$$\boxed{e^a_\mu \eta_{ab} e^b_\nu = g_{\mu\nu}}$$

Связность $\boxed{\omega_{\mu ab} = (e_a)^\nu D_\mu (e_b)_\nu}$ — 1-форма связности

$\boxed{\omega_{\mu ab}\, dx^\mu}$

Её координаты $\boxed{\omega_{abc}}$
Коэффициенты вращения Риччи

$$\omega_{\mu ab} = (e_a)^\nu D_\mu (e_b)_\nu = -(e_b)^\nu D_\mu (e_a)_\nu = -\omega_{\mu ba}$$

$$\boxed{\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}}$$

$$R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho A_\rho = [D_\mu, D_\nu] A_\lambda$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho e^d_\rho = [D_\mu D_\nu]\, e^d_\lambda}$$

$$\boxed{R_{abc}{}^d = e^\mu_a e^\nu_b e^\lambda_c e^d_\rho \cdot R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho = e^\mu_a e^\nu_b e^\lambda_c [D_\mu D_\nu]\, e^d_\lambda}$$

$$e^\lambda_c D_\mu D_\nu e^d_\lambda = D_\mu\left(e^\lambda_c D_\nu e^d_\lambda\right) - \underbrace{D_\mu e^\lambda_c D_\nu e^d_\lambda}_{\parallel}$$

$$D_\mu e^\lambda_c D_\nu e^d_\lambda = D_\mu e^\rho_c\, D_\nu e^d_\lambda\, e^\lambda_e\, e_{\rho e}$$

Значит, $$R_{abc}{}^d = e^\mu_a e^\nu_b \Big(D_\mu (\overbrace{e^\lambda_c D_\nu e^d_\lambda}^{\omega_{\nu c d}}) -$$

$$- D_\mu e^\rho_c\, D_\nu e^d_\lambda\, e^\lambda_e\, e_{\rho e} - (\mu\leftrightarrow\nu)\Big)$$

$$= e^\mu_a e^\nu_b \left(D_\mu \omega_{\nu c d} - \omega_{\mu e c}\,\omega_{\nu e d} - (\mu\leftrightarrow\nu)\right)$$

$$\boxed{R_{abc}{}^d = e^\mu_a e^\nu_b \Big[D_\mu \omega_{\nu cd} - D_\nu \omega_{\mu cd} - \omega_{\mu ec}\,\omega_{\nu ed} + \omega_{\mu ed}\,\omega_{\nu ec}\Big]}$$

$$R_{abc}{}^d = e^\mu_a D_\mu \omega_{bcd} - e^\nu_b D_\nu \omega_{acd}$$

$$- e^\mu_a D_\mu e_{b\lambda}\, \omega_{ecd}\, e^\nu_e e^\lambda_e + e^\nu_b \boxed{D_\nu e^\mu_a}\, \boxed{\omega_{\mu cd}\, e^\lambda_e}\, e^e_\lambda$$

ω_{aeb} $\qquad$ $\omega_{\nu ea}$ $\qquad$ ω_{ecd}

$$- \omega_{aec}\,\omega_{bed} + \omega_{aed}\,\omega_{bec} =$$

$$= D_a \omega_{bcd} - D_b \omega_{acd} - \omega_{aeb}\,\omega_{ecd} + \omega_{ecd}\,\omega_{bea}$$

$$- \omega_{aec}\,\omega_{bed} + \omega_{aed}\,\omega_{bec}$$

$$R_{abcd} = D_a \omega_{bcd} - D_b \omega_{acd} - \omega_{aeb}\omega_{ecd} + \omega_{ecd}\omega_{bea} -$$

$$- \omega_{abe}\omega_{ecd} + \omega_{acd}\omega_{bec}.$$

$$\boxed{R_{ac} = R_{abcd}\,\eta^{bd}}$$

<u>Но это ещё не всё!</u>

$$\boxed{\mathcal{L}_\psi = i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi}$$ — Фермионы

γ^a — Старые добрые матрицы Дирака

$$\boxed{\mathcal{L}_\psi = i\bar{\Psi}\gamma^a e_a^{\ \mu} D_\mu \Psi} \boxed{+ m\bar{\Psi}\Psi}$$

Кто такой?

Как спинор преобразуется относительно замен координат?

$\boxed{\omega_{\mu ab}}$ $$\boxed{D_\mu = \left(\partial_\mu + \omega_{\mu ab}\, S_{ab}\right)}$$

Потом!

$$\boxed{\begin{aligned} e_0 &= f^{1/2}\,dt \\ e_1 &= h^{1/2}\,dr \\ e_2 &= r\,d\theta \\ e_3 &= r\sin\theta\,d\varphi \end{aligned}}$$

Но как вычислить связность?

$$\boxed{\omega_{\mu a b} = e_a^{\ \nu} D_\mu e_{\nu b}}$$

$$\partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}$$

$$(D_\mu e_{a\nu} - D_\nu e_{a\mu}) = \cancel{e^{\mu c} D_\mu e_{ca} - e^{\mu c} D_\nu e_{a\mu}}$$

$$e^{b\nu} D_\mu e_{a\nu} = \omega_{\mu b a} \Longrightarrow D_\mu e_{a\nu} = e_{b\nu}\,\omega_{\mu b a}$$

$$e^{b\mu} D_\nu e_{a\mu} = \omega_{\nu b a} \Longrightarrow D_\nu e_{a\mu} = e_{b\mu}\,\omega_{\nu b a}$$

$$\boxed{\partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu} = e_{b\nu}\,\omega_{\mu b a} - e_{b\mu}\,\omega_{\nu b a}}$$

Решая эти ур-ния, можно заполучить $\omega_{\mu b a}$

$$de_a = \partial_\nu e_{a\mu}\, dX^\nu \wedge dX^\mu$$

$$\boxed{e_a = e_{a\mu}\, dX^\mu}$$

$$\omega_{ab} = \omega_{\mu a b}\, dX^\mu$$

$$e_b \wedge \omega_{ba} = e_{b\mu}\, dX^\mu \wedge \omega_{\nu b a}\, dX^\nu =$$

$$= e_{b\mu}\,\omega_{\nu b a}\, dX^\mu dX^\nu$$

$$\boxed{de_a + \omega_{ab}\wedge e_b = 0}$$

$$\boxed{e_a = e_{a\mu}\, dx^\mu}$$

$$\boxed{de_a = \partial_\nu e_{a\mu}\, dx^\nu \wedge dx^\mu}$$

$$\omega_{ab} \wedge e_b = \omega_{\mu ab}\, dx^\mu \wedge e_{\nu b}\, dx^\nu =$$

$$= \omega_{\mu ab}\, e_{\nu b}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$\boxed{de_a + \omega_{ab} \wedge e_b = 0}$$

$$(\partial_\nu e_{a\mu} - \partial_\mu e_{a\nu})\, dx^\nu \wedge dx^\mu +$$

$$+ (\omega_{\mu ab}\, e_{\nu b} - \omega_{\nu ab}\, e_{\mu b})\, dx^\mu \wedge dx^\nu = 0$$

$$\boxed{\partial_\nu e_{a\mu} - \partial_\mu e_{a\nu} = -\omega_{\mu ba}\, e_{\nu b} + \omega_{\nu ba}\, e_{\mu b}}$$ ok.

$$- de_0 = -\frac{f'}{2\sqrt{f}}\, dr \wedge dt = \omega_{0b} \wedge e_b =$$

$$= \omega_{01} \wedge h^{1/2} dr + \omega_{0\alpha} \wedge e_\alpha$$

$$\alpha_1 d\theta \quad \alpha_2 d\varphi$$

$$\cancel{\omega_{02} = \omega_{03} = 0} \qquad \boxed{\omega_{02} = 0}$$

$$\omega_{01} \wedge h^{1/2} dr = + \frac{f'}{2\sqrt{f}}\, dt \wedge dr$$

$$\boxed{\omega_{01} = \frac{f'}{2\sqrt{fh}}\, dt + \cancel{C_1 dr}}$$

$$de_1 = \frac{h'}{2\sqrt{h}}\, dr \wedge dr = 0$$

$$-0 = \omega_{1\beta} \wedge e_\beta = \underbrace{\omega_{10} \wedge f^{1/2} dt} - \underbrace{\omega_{12} \wedge \dots d\theta} - \underbrace{\omega_{13} \wedge \dots d\varphi}$$

$\cancel{\beta_1 d\theta}$ $\qquad \beta_2 d\varphi$

$$\boxed{\cancel{\omega_{12}} = \cancel{\omega_{13}} = 0}$$

$$\boxed{\cancel{\omega_{10} = C_2\, dt}} \Leftrightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

$$-de_2 = -dr \wedge d\theta =$$

$$= \omega_{2\beta} \wedge e_\beta = \underbrace{\omega_{20} \wedge f^{1/2} dt} - \omega_{21} \wedge h^{1/2} dr -$$

$$- \omega_{23} \wedge r \sin\theta\, d\varphi$$

$$\boxed{\cancel{\omega_{20} = C_3\, dt}} \longrightarrow \boxed{\omega_{20} = 0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_{21} &= -\frac{1}{\sqrt{h}}\, d\theta + \cancel{C_4\, dr} \\ \omega_{23} &= \cancel{C_5\, d\varphi} \end{aligned}} \qquad \boxed{\omega_{21} = -\frac{1}{\sqrt{h}}\, d\theta}$$

$$-de_3 = -\sin\theta\, dr \wedge d\varphi - r \cos\varphi\, d\theta \wedge d\varphi =$$

$$= \underbrace{\omega_{30}} \wedge f^{1/2} dt - \underbrace{\omega_{31} \wedge h^{1/2} dr} - \omega_{32} \wedge r\, d\theta$$

$$\boxed{\cancel{\omega_{30} = C \cdot dt}} \qquad \boxed{\omega_{30} = 0}$$

$$\boxed{\omega_{31} = +\frac{\sin\theta}{\sqrt{h}}\, d\varphi + \cancel{C \cdot dr}}$$

$$\boxed{\omega_{32} = -\frac{1}{r}\cancel{r} \cos\varphi\, d\varphi + \cancel{C\, d\theta}}$$

$$\boxed{\Phi = g_{00} - 1 = -\frac{2M}{r}}$$

$$\boxed{\Delta \Phi = +8\pi M\, \delta^{(3)}(r)} \qquad \boxed{\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\, \delta^{(3)}(r)}$$

$$\Delta\left(-\frac{2M}{r}\right) = \underbrace{-2M\left(-4\pi\, \delta^{(3)}(r)\right)} \qquad \boxed{-4\pi \frac{\cancel{r^2}}{\cancel{r^2}} = -4\pi} \quad \text{ok}$$

Добавил Ньютоновский предел!

<u>Проверка</u> $\qquad \frac{1}{2} f'' + \frac{f'}{r} = 0$

$$f' = \frac{2M}{r^2}$$

$$f'' = -\frac{4M}{r^3}$$

$$\cancel{-\frac{2M}{r^3} + \frac{2M}{r^3} = 0} \qquad \text{ok}$$

$\boxed{f, h \mapsto 1}$ <u>при $r \mapsto \infty$</u> $\Rightarrow$ <u>Asymptotic flatness</u>

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_{01} &= -\frac{f'}{2\sqrt{fh}}\,dt \\ \omega_{12} &= \frac{1}{\sqrt{h}}\,d\theta \\ \omega_{13} &= +\frac{\sin\theta}{\sqrt{h}}\,d\varphi \\ \omega_{23} &= +\cos\theta\,d\varphi \end{aligned}}$$

$$R_{\mu\nu cd} = \partial_\mu \omega_{\nu cd} - \partial_\nu \omega_{\mu cd} -$$

$$- \omega_{\mu ec}\, \omega_{\nu ed} + \omega_{\mu ed}\, \omega_{\nu ec},$$

$$R_{\mu\nu cd}\, dx^\mu \wedge dx^\nu = 2\, \partial_\mu \omega_{\nu cd}\, dx^\mu \wedge dx^\nu -$$

$$-2\omega_{\mu ec}\, dx^\mu \wedge \omega_{\nu ed}\, dx^\nu +$$

$$\boxed{\hat{R}_{cd} = 2\left(d\omega_{cd} - \omega_{ec} \wedge \omega_{ed}\right)}$$

$$\hat{R}_{01} = 2\left(d\omega_{01} - \cancel{\omega_{10} \wedge \omega_{11}}\right) =$$

$$= \cancel{2} - \left(\frac{f'}{\cancel{2}\sqrt{fh}}\right)' dr \wedge dt$$

$$\hat{R}_{02} = \cancel{2}\left(\cancel{d\omega_{02}} + \omega_{10} \wedge \omega_{12}\right) = + \frac{f'}{h\sqrt{f}}\, dt \wedge d\theta$$

$$+ \frac{f'}{2\sqrt{fh}}\, dt \qquad \frac{d\theta}{\sqrt{h}}$$

$$\hat{R}_{03} = \cancel{2}\Big(\cancel{d\omega_{03}}^{\,0} + \underbrace{\omega_{\cancel{2}0}}_{\cancel{+}\frac{f'}{\cancel{2}\sqrt{fh}}dt} \wedge \underbrace{\omega_{\cancel{f}3}}_{\frac{\sin\theta}{\sqrt{h}}d\varphi}\Big) =$$

$$= + \frac{f'\sin\theta}{h\sqrt{f}}\, dt\wedge d\varphi$$

$$\hat{R}_{12} = 2\Big(\underbrace{d\omega_{12}}_{-\frac{h'}{2(\sqrt{h})^3}dr\wedge d\theta} + \underbrace{\omega_{\cancel{e}1}}_{3} \wedge \underbrace{\omega_{e2}}_{3} + \cancel{\omega_{11}\wedge\omega_{12}}^{\,0}\Big)$$

$$+ \cancel{\frac{\sin\theta}{\sqrt{h}}d\varphi} \quad + \cancel{\cos\varphi\, d\varphi}$$

$$= -\frac{h'}{h^{3/2}}\, dr\wedge d\theta + \cancel{\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{h}}}$$

$$\hat{R}_{13} = 2\Big(d\omega_{13} + \omega_{\cancel{2}1}\wedge\omega_{\cancel{2}3} - \cancel{\omega_{f1}\wedge\omega_{f3}}^{\,0}\Big)$$

$$- \cancel{\omega_{e1}\wedge\omega_{e3}}$$

$$= \cancel{2}\Big(\cancel{\frac{2\cos\theta\, d\theta\wedge d\varphi}{\sqrt{h}}} - \frac{h'}{\cancel{2}\, h^{3/2}}\sin\theta\, dr\wedge d\varphi +$$

$$\cancel{+2\left(+\frac{1}{\sqrt{h}}d\theta\right)\wedge\cos\theta\, d\varphi}\Big)$$

$$= -\frac{h'}{h^{3/2}}\sin\theta\, dr\wedge d\varphi$$

$$\hat{R}_{23} = 2\big(d\omega_{23} + \omega_{f2}\wedge\omega_{f3}\big)$$

$$= 2\left(-\sin\theta\, d\theta\wedge d\varphi + \frac{1}{\sqrt{h}}d\theta\wedge\frac{\sin\theta}{\sqrt{h}}d\varphi\right)$$

$$\hat R_{01} = \left(\frac{f'}{\sqrt{fh}}\right)' dr\wedge dt = \left(\frac{f'}{\sqrt{fh}}\right)' \frac{1}{\sqrt{fh}}\, e_0\wedge e_1$$

$$\hat R_{02} = +\frac{f'}{h\sqrt f}\, dt\wedge d\theta = +\frac{f'}{fh}\,\frac{1}{r}\, e_0\wedge e_2$$

$$\hat R_{03} = +\frac{f'\sin\theta}{h\sqrt f}\, dt\wedge d\varphi = +\frac{f'\cancel{\sin\theta}}{rfh}\, e_0\wedge \frac{1}{\cancel{\sin\theta}} e_3$$

$$\hat R_{12} = -\frac{h'}{h^{3/2}}\, dr\wedge d\theta = -\frac{h'}{rh^{2}}\, e_1\wedge e_2$$

$$\hat R_{13} = -\frac{h'}{h^{3/2}}\sin\theta\, dr\wedge d\varphi = -\frac{h'}{h\sqrt h}\,\frac{\cancel{\sin\theta}}{r}\,\frac{1}{\sqrt h}\, e_1\wedge \frac{1}{\cancel{r\sin\theta}} e_3$$

$$\hat R_{23} = \sin\theta\, 2\, d\theta\wedge d\varphi\left(-1+\frac{1}{h}\right) = \frac{2\cancel{\sin\theta}}{r^2}\left(-1+\frac{1}{h}\right)\frac{1}{\cancel{\sin\theta}}\, e_2\wedge e_3$$

$$R_{00} = \cancel{R_{0000}}^{\,0} + R_{01\underbrace{01}} - R_{02\underbrace{02}} - R_{03\underbrace{03}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{f'}{\sqrt{fh}}\right)' \frac{1}{\sqrt{fh}} + \frac{f'}{fhr} + \cancel{\frac{f'}{r\sqrt{fh}}}$$

$$R_{11} = R_{10\underbrace{10}} + R_{1212} - R_{1313} = /$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{f'}{\sqrt{fh}}\right)' \frac{1}{\sqrt{fh}} + \frac{h'}{rh^2} + \cancel{\frac{h'}{2h^2 r}} = 0$$

$$R_{22} = R_{2020} - R_{2121} - R_{2323} =$$

$$= \frac{f'}{2fh\ldots} + \frac{h'}{2\ldots} + \frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{h}\right)$$

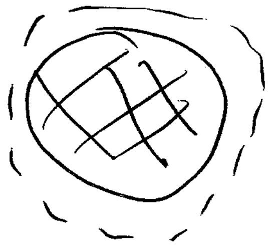
$$\frac{f'}{f} + \frac{h'}{h} = 0 \Rightarrow \ln f = -\ln h + c$$

Решаем

$$\boxed{f = \frac{c}{h}}$$

$$\boxed{t \mapsto \text{const} \cdot t} \Rightarrow \boxed{f = 1/h}$$

Внешность звезды



$$\frac{1}{2} f'' + \frac{f'}{r} = 0$$

$$-\frac{f'}{4r} - \cancel{\frac{f}{2r}} + \frac{1}{r^2}(1-f) = 0$$

$$\boxed{-f' + \frac{1-f}{r} = 0}$$

$$-(rf)' + 1 = 0 \Rightarrow \underline{(rf)' = 1}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f = \frac{c}{r} + 1}$$

$$\boxed{h = \frac{1}{1 + \frac{c}{r}}} \qquad \boxed{-2M}$$

Скоро проинтерпретируем как массу гравитирующего тела

$$\Downarrow$$

$$\boxed{ds^2 = +\left(1 + \frac{c}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{c}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2}$$

$$\boxed{ds^2 = +\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2}$$

Закон Ньютона

3 последовательных приближения

1) $\boxed{g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}}$ $\boxed{h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}}$ - слабое поле

2) Нерелятивистское приближение - Восстанавливаем c

$$ds^2 = \underbrace{g_{00}}_{O(c^2)} dt^2 + \underbrace{2 g_{0i}}_{O(c)} dt\, dx^i + \underbrace{g_{ij}}_{O(1)} dx^i dx^j$$

3) Покоящееся [redacted] распределение материи

$$\boxed{T_{00} = \rho}$$

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}\left(-\partial_i g_{00}\right) = \frac{1}{2} \partial_i h_{00} \quad \propto O(c^2)$$

$\boxed{Д/З}$ проверить, что все остальные компоненты меньше.

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}}$$

$$-R = 8\pi T$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\left(-8\pi T\right) = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} = 8\pi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right)}$$

$$R_{00} = \partial_i \Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} \Delta h_{00} = 8\pi\left(T_{00} - \frac{1}{2} T_{00}\right) =$$

$$= 4\pi\rho$$

VI

$\boxed{\phi = -\frac{1}{2} h_{00}}$ $\boxed{\Delta \Phi = +4\pi\rho}$ Для т. зар. $\boxed{\phi = -\frac{M}{r}}$

Гравитационное поле с массой M

Обсуждаем метрику Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2M/r} - r^2 d\Omega^2$$

$\boxed{R_s = 2M}$, $\boxed{r = 0}$ – Сингулярность $\Rightarrow$ Непонятно, что делать с решением!

ДЗ Получим выражение для радиуса Шварцшильда в системе СГС.

$$\boxed{[G_N] = \frac{1}{\text{кг}^2}}$$

$$\underbrace{[M \cdot G_N] = \frac{1}{\text{кг}}}$$

$$F = G_N \frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{\cancel{\text{кг}^2}\, G_N}{\cancel{\text{см}}} = \cancel{\text{кг}} \cdot \frac{\text{см}^3}{\text{сек}^2\, \text{кг}}$$

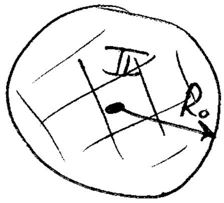
$$\boxed{[G_N] = \frac{\text{см}^2}{\text{сек}^2 \cdot \text{кг}}}$$

$$\boxed{\frac{(M \cdot G_N)}{c^2}} = \frac{\text{см}^3}{\text{сек}^2} \frac{\text{сек}^2}{\text{см}^2} = \text{см} \quad . \text{ ok}$$

$\boxed{\text{Начнём с звезды}}$

$\boxed{R_0 > R_S}$ ← Иначе решение не работает. (г. дотра)

I



Масса звезды

(I) $$ds^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}} - r^2\, d\Omega^2$$

(II) Внутреннее решение

$$T_{\mu\nu} = \rho\, u_\mu u_\nu - p\,(g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu)$$

CO: $\boxed{u_\mu = 0}$, $\boxed{g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}}$:
$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & & & 0 \\ & +p & & \\ & & +p & \\ 0 & & & +p \end{pmatrix}$$

u_μ - 4 - скорость

$p = p(\rho)$ Ур-ние состояния

Год назад была задача, что из ур-й $\boxed{D_\mu T_{\mu\nu} = 0}$ следуют ур-ния Эйлера

Такой $T_{\mu\nu}$ описывает жидкость с давлением p и плотностью ρ, 4 - скоростью u^μ

$u^\mu = (\sqrt{f}, 0, 0, 0)$ $u^\mu u_\mu = 1 = f\,\frac{1}{f} = 1$ ok

$u^\mu = e_0^\mu$ — В точности тетрада

$u^a = (1, \vec{0})$

$$\boxed{T_{ab} = (p+\rho) u_a u_b - p\, g_{ab}}$$

$$G_{00} =$$

$$= \frac{1}{2} R_{00} + \frac{1}{2}\left(\cancel{R_{00}} + R_{11} + 2R_{22} - \cancel{R_{33}}\right) =$$

$$= \frac{R_{00} + R_{11}}{2} + R_{22} =$$

$$= \cancel{\frac{f'}{2rfh}} + \frac{h'}{2rh^2} \cancel{- \frac{f'}{2rfh}} + \cancel{\frac{h'}{2rh^2}} + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h}\right) =$$

$$= 8\pi\rho$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{h'}{rh^2}}_{\parallel} + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h}\right) = 8\pi\rho}$$

$$\frac{1}{r^2} r \frac{d}{dr}\left(1 - \frac{1}{h}\right)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r\left(1 - \frac{1}{h}\right)\right) = 8\pi\rho \qquad \boxed{\text{в предположении } h \neq 0}$$

$$r\left(1 - \frac{1}{\underbrace{h}}\right) = 8\pi \int_0^r dr'\, r'^2 \rho(r') + \cancel{C}, \quad C = 0$$

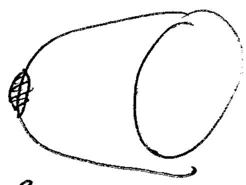
$$\boxed{m(r) = 4\pi \int_0^r dr'\, r'^2 \rho(r')}$$ – Масса в-ва внутри сферы радиуса r

$$\cancel{r}\left(1 - \frac{1}{h}\right) = \frac{2m(r)}{r}$$

$$\boxed{h = \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]^{-1}}$$ – Однозначное решение! Напоминает теорему Гаусса

$\boxed{r \mapsto 0}$

$$\boxed{4\pi r^2 = A}$$ – Площадь



Если мы на $r \ll$ Радиус кривизны пр-ва - времени

то $h(r)\, r$ – Радиус сферы

$$4\pi \left(h(r)\, r\right)^2 = 4\pi r^2 \Rightarrow \boxed{h(r) \mapsto 1}$$

(Отсутствие конической сингулярности)

Необходимое условие существования решения

$\boxed{r_0 \geq m(r)}$!

$$\boxed{M = 4\pi \int_0^R \rho(r^2)\, dr\, r^2}$$ ← Сшивка с решением Шварцшильда.

Формально это масса Но! Не масса!

$$\boxed{dV = \underbrace{\sqrt{h}}\, dr\, \cancel{}\, d\Omega_2}$$

Отсутствует в формуле для M

$\boxed{-M_p + M}$

Есть отрицательная энергия связи, и именно оно и гравитирует!

$$\boxed{M_p = 4\pi \int_0^{R_0} \sqrt{h}\, \rho(r)\, dr\, r^2}$$

Действительная масса

$$G_{11} = \frac{1}{2}R_{11} + \frac{1}{2}\left(R_{00} - \cancel{R_{11}} - 2R_{22}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(R_{11} + R_{00} - 2R_{22}\right) =$$

$$= \frac{f'}{2rfh} + \cancel{\frac{h'}{2rh^2}} + \frac{f'}{2rfh} - \cancel{\frac{h'}{2rh^2}} - \frac{1}{r^2}\left(1 - 1 + \frac{2M(r)}{r}\right)$$

$$= 8\pi p$$

$$\boxed{\frac{f'}{rfh} - \frac{1}{r^3}2m(r) = 8\pi p.}$$

$$\boxed{f = e^{2\phi}}$$

$$\frac{2\phi'}{} = \frac{r\left(4\pi p + \frac{m(r)}{r^3}\right)}{1 - \frac{2m(r)}{r}}$$

$$\boxed{\phi' = \frac{\left(4\pi p r^3 + m(r)\right)}{r\left[r - 2m(r)\right]}}$$

Уравнение для $\phi(r)$

Ньютоновское приближение:

Давление

$\boxed{p \ll m(r)}$ Энергия

$\boxed{r \gg m(r)}$

Радиус. Радиус Шварцшильда

$$\boxed{\phi' = \frac{m(r)}{r}} \Longleftrightarrow \boxed{\phi \text{ - Ньютоновский потенциал.}}$$

$$\boxed{D_\mu T_{\mu\nu} = 0}$$

$$e^\nu_c D_\mu T_{\mu\nu} = 0$$

$$e^\nu_c D_\mu \left(e^a_\mu T_{ab} e^b_\nu \right) = 0$$

$$0 = e^\nu_c \underbrace{D_\mu e^a_\mu}_{} T_{ab} e^b_\nu + \underbrace{\cancel{e^\nu_c} e^a_\mu \partial_\mu T_{ac} \cancel{e^b_\nu}}_{} + e^\nu_c \cancel{e^a_\mu} T_{ab} D_\mu e^b_\nu$$

$$e^\mu_d \underbrace{e^{dx} D_\mu e^a_x}_{\omega^a_{\mu\, da}} T_{ab} \qquad \omega^a_{\mu\, c}{}^b$$

$$0 = \partial_a T_{ac} + \underbrace{\omega_{acb} T_{ab}}_{} + \underbrace{\omega_{dda} T_{ac}}_{} = 0$$

$$= D_a T_{ac} = \partial_a T_{ac} + \underline{\omega_{aad}}\, \underline{T_{dc}} + \omega_{a\underline{cd}}\, \underline{T_{ad}}.$$ ok

$$\boxed{D_a T_{a1} = 0}$$

$$\parallel$$

$$e^1_{a=1} \partial_1 T_{11} + \underbrace{\omega_{aa1}}_{\omega_{001} - \omega_{221} - \omega_{331}} T_{11} + \underbrace{\omega_{a1d} T_{ad}}_{}$$

$$e^1_{a=1} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

$$\omega_{010} \overset{=\rho}{T_{00}} + \omega_{212} \overset{=P}{T_{22}} + \omega_{313} \overset{=P}{T_{33}}$$

$$\boxed{\omega_{aa1} = \omega_{001} - \omega_{221} - \omega_{331}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{\omega}_{01} &= -\frac{f'}{2f\sqrt{h}}\, e_0 \\ \hat{\omega}_{12} &= \frac{1}{r\sqrt{h}}\, e_2 \\ \hat{\omega}_{13} &= \frac{1}{r\sqrt{h}}\, e_3 \\ \hat{\omega}_{23} &= \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}\, e_3\end{aligned}}$$

ω_{212}

$$\omega_{aa1} = \underbrace{-\frac{f'}{2f\sqrt{h}} + \frac{2}{r\sqrt{h}}}_{\boxed{-2\omega_{221}}} + \cancel{\frac{1}{r\sqrt{h}}}$$

$$\cancel{\frac{1}{\sqrt{h}}} + \cancel{\sqrt{h}}\, \partial_r p + \left(-\frac{f'}{2f\cancel{\sqrt{h}}} + \cancel{\frac{2}{r\sqrt{h}}}\right) p +$$

$$+ \rho\left(-\frac{f'}{2f\cancel{\sqrt{h}}}\right) + \cancel{\rho\frac{2}{r\sqrt{h}}} = 0$$

$$\frac{dp}{dr} + \frac{f' p}{2f\cancel{h}} + \frac{f'\rho}{2f\cancel{h}} = 0$$

$$\boxed{\frac{dp}{dr} + \frac{f'}{2f}(p+\rho) = 0}$$

$$\frac{dp}{dr} + \frac{\phi'}{h}(p+\rho) = 0$$

$$\frac{dp}{dr} = - \cancel{\left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]} \frac{4\pi p r^3 + m(r)}{r^2\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}$$

$$\boxed{\frac{dp}{dr} = -(p+\rho)\,\frac{m(r) + 4\pi p r^3}{2r(r-2m(r))}}$$

Уравнение Толмена - Оппенхеймера - Волкова

Пусть задано ур-ние состояния $\boxed{p = p(\rho)}$

$\boxed{\rho(0) = \rho_c}$ – Стартуем с какого-то значения в центре

Решаем ур-ние ТОВ до границы звезды ~~пока~~ пока не достигнем ~~[illegible]~~

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{p(R) = 0}\\ \boxed{\rho(R) = 0}\end{array}\right\}$$ Граница Звезды.

Определяем $m(r)$ – Интегрируем

$f(r)$ – Интегрируем от $r = \infty$ где $f(r) = 1$

$\boxed{\text{ВСЁ}}$

$$\boxed{\rho(r) = \begin{cases}\rho_0, & r \le R\\ 0, & r > R\end{cases}}$$ → Несжимаемая ~~[illegible]~~ звезда.

$$\boxed{m(r) = 4\pi\int_0^r dr' r'^2 \rho(r') = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0}$$ $\boxed{M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0}$ $\boxed{r \le R}$

~~$\frac{dp}{dr} = -(p+\rho_0)\,\frac{r^2\,\frac{4}{3}\pi\rho_0 + 4\pi p(r)}{2(r - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0)}$~~

$$p' = -(p+\rho)\,\frac{m(r) + 4\pi r^3\, p(r)}{2r\,(r - 2m(r))}$$

$$p' = -(p+\rho_0)\, r^2\, \frac{-\frac{2}{3}\cancel{8\pi r^3}\rho_0 + \cancel{4\pi r^3}(p+\rho_0) - \cancel{4\pi r^3 \rho_0}}{\cancel{2r}\left(r - \frac{8}{3}\pi r^3 \rho_0\right)} \quad 2\pi$$

$$\boxed{Z = p + \rho_0}$$

$$\frac{dZ}{Z\left(Z - \frac{2}{3}\rho_0\right)} = -\frac{\frac{4}{3}\,2\pi\,\rho_0\, dr^2 / 2}{1 - \frac{8}{3}\pi\rho_0 r^2}\;\frac{3}{4}\;\frac{1}{\rho_0} =$$

$$\parallel$$

$$= \frac{3}{4\rho_0}\, d\ln\left(1 - \frac{8}{3}\pi\rho_0 r^2\right)$$

$$\underbrace{\frac{3}{2\rho_0}\, dZ\left(\frac{1}{Z - \frac{2}{3}\rho_0} - \frac{1}{Z}\right)}$$

$$\ln\frac{Z - \frac{2}{3}\rho_0}{Z} = \ln C\sqrt{1 - \frac{8}{3}\pi\rho_0 r^2}$$

$$\boxed{\frac{Z - \frac{2}{3}\rho_0}{Z} = C\sqrt{1 - \frac{8}{3}\pi\rho_0 r^2}}$$

$$\frac{\frac{1}{3}\cancel{\rho_0}}{\cancel{\rho_0}} = C\sqrt{1 - \frac{8}{3}\pi\rho_0 R^2} = C\sqrt{1 - \frac{2M}{R}}$$

$$\boxed{r = R}$$

$$\frac{2}{R}\left(\frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3\right) = \frac{2M}{R}$$

$$\boxed{C = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2}}$$

$$Z\left(1 - C\sqrt{1-\frac{8}{3}\pi\rho_0 r^2}\right) = +\frac{2}{3}\rho_0$$

$$P = Z = \frac{-\cancel{1}/3\,\rho_0 - \cancel{\rho_0} + \rho_0 C\sqrt{1-\frac{8\pi}{3}\rho_0 r^2}}{1 - C\sqrt{1-\frac{8\pi}{3}\rho_0 r^2}}$$

$$P = \frac{\rho_0}{3}\,\frac{-1 + \sqrt{1-\frac{8\pi}{3}\rho_0 r^2}\Big/\sqrt{1-2M/R}}{1 - \frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{8\pi}{3}\rho_0 r^2}\Big/\sqrt{1-\frac{2M}{R}}}$$

$$\boxed{P = \rho_0\,\frac{\sqrt{1-\frac{8\pi}{3}\rho_0 r^2} - \sqrt{1-\frac{2M}{R}}}{3\sqrt{1-\frac{2M}{R}} - \sqrt{1-\frac{8\pi}{3}\rho_0 r^2}}}$$

$$\boxed{P(0) = P_c = \rho_0\,\frac{1 - \sqrt{1-\frac{2M}{R}}}{3\sqrt{1-\frac{2M}{R}} - 1}}$$

$$\cancel{3}\sqrt{1-\frac{2M}{R}} = 1/3$$

$$\cancel{1} - \frac{2M}{R} = \cancel{1/9} = -8/9$$

$$\frac{M}{} < 4/9$$

Несжимаемая звезда не может существовать при $M > 4/9\, R$

$$\boxed{M < 4/9\, R}$$

Перейдём к ограничению сверху на массу звезды

2 вида Ограничений:

1) $R = \text{fixed}$ $\qquad \boxed{M_{max} = \frac{4R}{9}}$ ⟵ Достигается при $\rho = \text{const}$

2) $\boxed{\begin{matrix} \rho(p) \\ \rho < \rho_0 \end{matrix}}$ фиксировано $\Rightarrow \exists M_{max}$.

без всякого предположения относительно $p(\rho)$

---

(1) $\boxed{M \leq R/2}$ — Необходимое условие для $\boxed{h(r) \geq 0}$

$\boxed{R_s \leq R}$

$\boxed{f \geq 0}$ Предположим, что $\boxed{\begin{matrix} \rho \geq 0 \\ \frac{d\rho}{dr} \leq 0 \end{matrix}}$ — Реалистично

Давайте выведем уравнение

$$G_{22} = \cancel{R_{22}} + \frac{1}{2}\left(R_{00} - R_{11} - \cancel{2R_{22}} - \cancel{R_{33}}\right) = 8\pi p$$

$$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{fh}}\left(\frac{f'}{\sqrt{fh}}\right)' + \frac{f'}{2rfh} - \frac{h'}{2rh^2} = 8\pi p}$$

$$\boxed{\frac{f'}{rfh} - \frac{2m(r)}{r^3} = 8\pi p}$$

Решение для h

$$\frac{1}{2\sqrt{fh}}\left(\frac{f'}{\sqrt{fh}}\right)' - \frac{f'}{2rfh}\left(-\frac{h'}{2rh^2}\right) + \frac{2m(r)}{r^3} = 0$$

$$+\frac{h'}{2rh^2} = + \cancel{\frac{\left(\frac{2m}{r}\right)'}{2rh\left(1-\frac{2m}{r}\right)}} + \frac{+\left(\frac{2m}{r}\right)'}{\cancel{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{fh}}\left(\frac{f' \cdot r}{2\sqrt{h}\sqrt{f}\, r}\right)'}_{} - \frac{f'}{2rfh} =$$

$$= + \frac{(m/r)'}{r} + \frac{2m(r)}{r^3} =$$

$$= +r\left(\frac{m}{r^3}\right)'$$

$$\frac{r}{2\sqrt{fh}}\left(\frac{f'}{\sqrt{fh}\, r}\right)' + \cancel{\frac{1}{2\sqrt{fh}}\left(\frac{f'}{\sqrt{fh}\, r}\right)} - \cancel{\frac{f}{2rfh}}$$

$$\frac{\cancel{r}}{\sqrt{fh}}\left[\frac{1}{r\sqrt{h}}\frac{d\sqrt{f}}{dr}\right]' = + \cancel{r}\left(\frac{m}{r^3}\right)'$$

Average density

$$\boxed{\left(\frac{1}{r\sqrt{h}}\frac{d\sqrt{f}}{dr}\right)' = +\sqrt{fh}\left(\frac{m}{r^3}\right)'} \leq 0$$

$\boxed{\frac{d\rho}{dr} \leq 0}$ $\Longrightarrow$ <u>Average density decreases monotonically</u>

$$\underbrace{\left(\frac{1}{r\sqrt{h}}\frac{d\sqrt{f}}{dr}\right)' \leq 0}_{}$$

$$\int_r^R dr \left(\quad \right) \leq 0$$

$$\frac{1}{R\sqrt{h(R)}} \left.\frac{d\sqrt{f}}{dr}\right|_{r=R} \leq \frac{1}{r\sqrt{h}} \frac{d\sqrt{f}}{dr}$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{R}\sqrt{1-\frac{2M}{R}} \left.\frac{d}{dr}\sqrt{1-\frac{2M}{R}}\right|_{r=R} = \frac{1}{R}\cancel{\sqrt{1-\frac{2M}{R}}} \times$$

$$\times \frac{\frac{2M}{R^2}}{2\cancel{\sqrt{1-\frac{2M}{R}}}} = \frac{M}{R^3}$$

$$\boxed{\frac{1}{\cancel{r\sqrt{h}}} \frac{d\sqrt{f}}{dr} \geq \frac{2M}{R^3} \Big] r\sqrt{h}}$$

$$\boxed{\frac{m(r)}{r^3} \not\geq \frac{M}{R^3}}$$

$$\sqrt{f(R)} - \sqrt{f(0)} \geq \frac{M}{R^3} \int_0^R r\,dr \left(\sqrt{1-\frac{2m(r)}{r}}\right)^{-1}$$

$$\sqrt{1-\frac{2M}{R}}$$

$$\geq \frac{R}{2M}\frac{M}{R^3} \int_0^R \frac{dr^2 \frac{2M}{R^3}}{\sqrt{1-\frac{2Mr^2}{R^3}}} =$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dr} \leq 0} \implies \boxed{m(r) \geq \frac{M}{R^3}\cdot r^3}$$

$$= -\frac{1}{2R^2} \frac{2}{2} \sqrt{1-\frac{2M}{R^3}\cdot r^2}\ \Big|_0^R =$$

$$= -\frac{1}{2R^2}\sqrt{1-\frac{2M}{R}} + \frac{1}{2R^2}$$

$$\sqrt{f(0)} \le \frac{3}{2\cancel{R^2}}\sqrt{1-\frac{2M}{R}} - \frac{1}{2\cancel{R^2}}$$

$$\boxed{\underset{\underset{0}{\vee}}{\sqrt{f(0)}} \le \frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{2M}{R}} - 1/2}$$

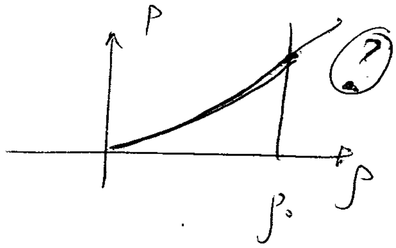
$$\underbrace{3\sqrt{1-\frac{2M}{R}} \ge 1} \qquad \cancel{1} + \frac{2M}{R} \le 8/9$$

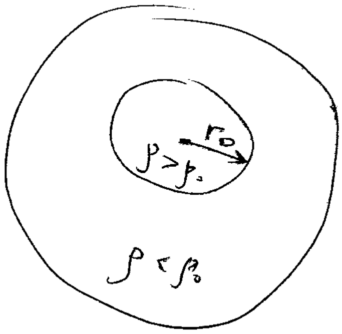
$$\boxed{M \le \frac{4}{9}R}$$

Давайте поймём, что есть и предел M при данном ур-нии состояния

$\boxed{\frac{d\rho}{dr} \le 0}$ — Опять предполагаем

Пусть мы знаем ур-ние состояния $p(\rho)$ при $\boxed{\rho \le \rho_0}$





$\boxed{M(\rho_0, r_0)}$

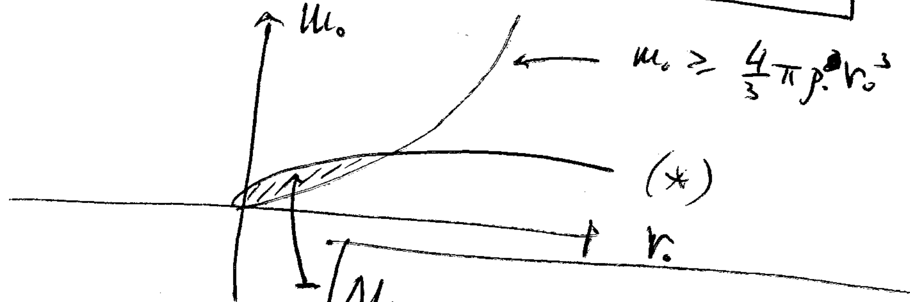
Total mass.

$\boxed{m_0 \ge \frac{4}{3}\pi\rho_0 r_0^3}$ ← т.к. ядро более плотное, чем ρ_0

$\boxed{Д/з}$ Вывести предел выше при условии, что $\boxed{\begin{array}{l}\rho_0(r_0) = \rho_0 \\ p(r_0) = p_0\end{array}}$

$$\boxed{m_0 \le \frac{2}{9} r_0 \left(1 - 6\pi r_0^2 P_0 + \left(1 + 6\pi r_0^2 P_0\right)^{1/2}\right)} \quad (*)$$

$$\boxed{M = m_0 + 4\pi \int_{r_0}^{R} \rho(r)\, r^2 dr = M(m_0, r_0)}$$



Минимизируем ф-цию $M(m_0, r_0)$ по конечной области $\Rightarrow$ Ограничен…

Решение Д/3

$$\boxed{\left(\frac{1}{r\sqrt{h}} \frac{d\sqrt{f}}{dr}\right)' \le 0}$$

$$\frac{1}{\cancel{r_0}\sqrt{h}} \frac{f'}{2 f}\Big|_{r_0} \sqrt{f(r_0)} \ge \frac{1}{r\sqrt{h}} \frac{d\sqrt{f}}{dr}$$

$$\sqrt{f_0}\, \frac{m_0 + 4\pi p_0 r_0^3}{r_0^3\left(1 - \frac{2m_0}{r_0}\right)}$$

$$r\sqrt{h}\, \frac{\sqrt{f_0}\, \cancel{\sqrt{1 - \frac{2m_0}{r_0}}}}{r_0^3 \sqrt{1 - \frac{2m_0}{r}}} \left(m_0 + 4\pi p_0 r_0^3\right) \le \cancel{\frac{1}{r\sqrt{h}}} \frac{d\sqrt{f}}{dr}$$

$$\sqrt{f(r_0)} - \sqrt{f(0)} \geq \frac{1}{4m_0}\left(\int_0^{r_0} \frac{dr'^2\,\frac{2m_0}{r_0^3}}{\sqrt{1-\frac{2m_0}{r_0^3}r'^2}}\right)\frac{\sqrt{f_0}}{} \; \frac{m_0+4\pi p_0 r_0^3}{\sqrt{1-\frac{2m_0}{r_0}}}$$

$$1$$

$$1 \geq \frac{1}{2m_0}\,\frac{m_0+4\pi p_0 r_0^3}{\sqrt{1-\frac{2m_0}{r_0}}}(+2)\left(-\sqrt{1-\frac{2m_0}{r_0}}+1\right)$$

$$\sqrt{1-\frac{2m_0}{r_0}}\left(2+1+\frac{4\pi p_0 r_0^3}{m_0}\right) \geq \left(1+\frac{4\pi p_0 r_0^3}{m_0}\right)$$

$$\boxed{\sqrt{1-\frac{2m_0}{r_0}} \geq \frac{1+\frac{4\pi p_0 r_0^3}{m_0}}{3+\frac{4\pi p_0 r_0^3}{m_0}}}$$

$$x = \frac{2m_0}{r_0}$$

$$\sqrt{1-x} \geq \frac{1}{3}\,\frac{x+8\pi p_0 r_0^2}{x+\frac{8\pi}{3}p_0 r_0^2}$$

$$1-x \geq \frac{1}{9}\left[1+\frac{\frac{16\pi}{3}p_0 r_0^2}{x+\frac{8\pi}{3}p_0 r_0^2}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{9}\left[1+\frac{\frac{32}{3}\pi p_0 r_0^2}{x+\frac{8\pi}{3}p_0 r_0^2}+\frac{\frac{256\pi^2}{9}p_0^2 r_0^4}{\left(x+\frac{8\pi}{3}p_0 r_0^2\right)^2}\right]$$

$$\boxed{x = \frac{2m_0}{r_0}}$$

$$\boxed{\alpha = 8\pi p_0 r_0^2}$$

$$\sqrt{1-x} \geq \frac{x+\alpha}{3x+\alpha}$$

$$1-x \geq \frac{(x+\alpha)^2}{(3x+\alpha)^2}$$

$$(3x+\alpha)^2(1-x) \geq (x+\alpha)^2 = x^2+2x\alpha+\alpha^2$$

$$-9x^3 - 6x^2\alpha + \cancel{\alpha^2} + \left(9x^2 + 6x\alpha + \alpha^2\right) \leq x^2 + \cancel{2x\alpha + \alpha^2}$$

$$9x^2 + 2x(3\alpha - 4) + \alpha^2 - 4\alpha \leq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{\cancel{2}\cdot 9}\left(-\cancel{2}(3\alpha-4) \pm \sqrt{\cancel{4}(3\alpha-4)^2 - \cancel{4}\cdot 9(\alpha^2-4\alpha)}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(-3\alpha+4 \pm \sqrt{\cancel{9\alpha^2} - \cancel{24\alpha} + 16 - \cancel{9\alpha^2} + \cancel{36}\overset{}{\underset{12}{}}\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(-3\alpha+4 \pm 2\sqrt{3\alpha+4}\right)$$

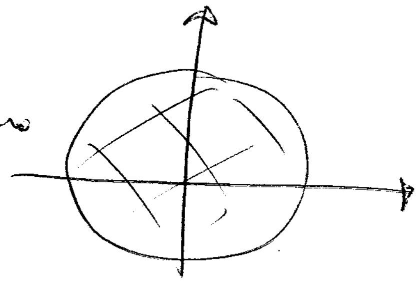
$$\frac{2m_0}{r_0} < \frac{1}{9}\left(-3\alpha+4+2\sqrt{3\alpha+4}\right)$$

$$= \frac{4}{9}\left(\overset{1}{\cancel{4}} - 3\cdot \overset{2}{\cancel{8}}\pi p_0 r_0^2 + \cancel{4}\sqrt{2\cdot 3\cdot \cancel{8}\pi p_0 r_0^2 + \cancel{4}1}\right)$$

$$\boxed{m_0 \le \frac{2}{g} r_0 \left[1 - 6\pi p_0 r_0^2 + \sqrt{1 + 6\pi p_0 r_0^2}\right]}$$

Сфера Ферми

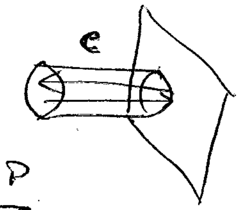
① Белые карлики — Из-за вырожденного электронного газа



$$\boxed{\frac{4}{3}\pi p^3 \cdot (\Delta x)^3 \simeq N}$$

$$\boxed{4\pi p^3 \sim n} \qquad \boxed{p \sim n^{1/3}}$$

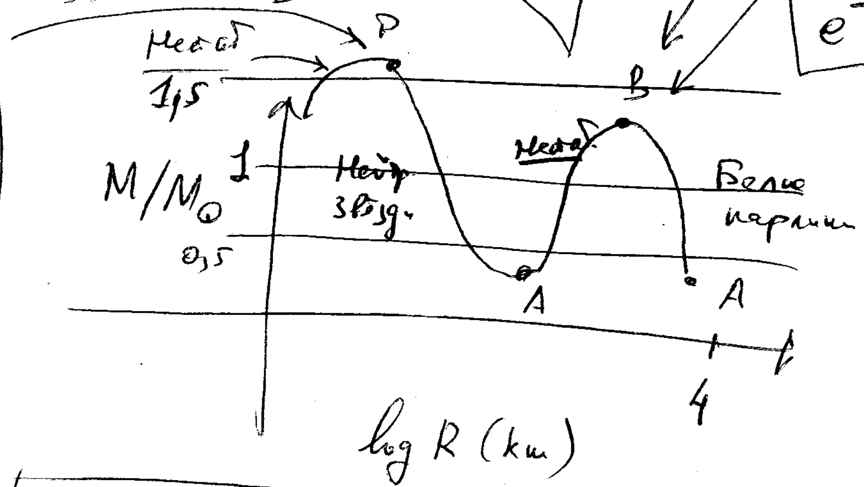
$$\boxed{P \sim pnc \sim n^{4/3}}$$



Предел Чандрасекара

Конверсия $e^- + p \leftrightarrow n$

Предел для нейтронной звезды



$$\boxed{M_{max} \approx 1.4 \left(\frac{2}{\mu_N}\right)^2 M_\odot}$$

\# ядер по отн. к эл-ну

② Нейтронизация

$$\boxed{p + e^- = n}$$

Позволяет избавиться от такого давления!

Но начинает накапливаться такое же давление нейтронов.

Нерелят. ф-ла $\quad P \sim pnv = n^{2/3} \cdot n \sim n^{5/3}$ $\quad (v = p/m)$