ОТО, 8 семестр.
Задачи к экзамену – 2011

1. Квантовая космология

Рассмотрим замкнутую Вселенную с положительной космологической постоянной.

1. Выписать наиболее общий пространственно однородный и изотропный анзац для $g_{\mu\nu}$, подставить его в действие ОТО. Показать, что уравнения движения, следующие из полученного редуцированного действия, эквивалентны уравнению Фридмана для замкнутой Вселенной.

2. Проквантовать редуцированную модель. Найти волновую функцию Вселенной в квазиклассическом приближении. При каких условиях это приближение применимо?

3. Что такое время?

2. Многомерные гравитоны

Рассмотрим линеаризованную ОТО в D–мерии.

1. Найти тензоры энергии–импульса и момента. Меняются ли они при калибровочных преобразованиях?

2. Проквантовать модель. Найти число поляризационных состояний гравитона и соответствующие квантовые числа (энергию, импульс и аналог спина). Отдельно рассмотреть случаи четного и нечетного числа измерений.

3. Редукция на сферу

Рассмотрим минимально взаимодействующие электромагнитное и гравитационное поля в $D = 6$. Также рассмотрим многообразие $\mathcal{B} = \mathcal{M}_4 \times \mathcal{S}^2$, где $\mathcal{M}_4$ — четырехмерное пространство Минковского, $\mathcal{S}^2$ — двумерная сфера.

1. При каких значениях радиуса $\mathcal{S}^2$ многообразие $\mathcal{B}$ является решением уравнений Эйнштейна–Максвелла?

2. Найти векторы Киллинга $\mathcal{B}$. Какую алгебру они образуют?

3. Рассмотрим линейные возмущения на фоне $\mathcal{B}$. Найти четырехмерно безмассовые моды, т.е. решения линеаризованных уравнений, для которых квадрат четырех-импульса равен нулю. Показать, что эти моды образуют калибровочную теорию с группой $SU(2)$.

4. Массивная гравитация: патологические случаи

Добавим к действию ОТО член

$$S_m = \frac{1}{16\pi}\int d^4x \left[-\frac{m^2}{4}\, h_{\mu\nu}h_{\lambda\rho}\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho} + \frac{\alpha}{4}\,(h_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu})^2\right] \ ,$$

где $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,\,-1,\,-1,\,-1)$.

1. Выписать лагранжиан линейных возмущений на фоне пространства Минковского. Показать, что m — масса гравитона.

2. Найти количество поляризационных состояний.

3. При каких значениях α энергия гравитационных волн ограничена снизу?

5. Массивная гравитация: экспериментальная проверка

Рассмотрим модель из предыдущей задачи. Положим $\alpha = m^2$. Далее будем работать в линейном приближении по $h_{\mu\nu} \ll 1$.

1. Найти гравитационное поле вне сферически–симметричной звезды массы M. Существует ли предел этого решения при $m \to 0$? Выполняется ли закон Ньютона? Отдельно рассмотреть случай точечного источника.

2. Используя экспериментальные данные по отклонению лучей света вблизи Солнца, поставить ограничение на m.

6. Быстро летящая черная дыра

Рассмотрим черную дыру массы M.

1. Показать, что метрику Швардшильда можно преобразовать к виду

   $$ds^2 = A(\rho)dt^2 - B(\rho)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \ ,$$

   где $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Найти A и B.

2. С помощью преобразования Лоренца получить метрику черной дыры, движущейся с постоянной скоростью v.

3. Рассмотрим предел $v \to 1$ при фиксированной кинетической энергии $E = M/\sqrt{1-v^2}$. Подобрать преобразование координат таким образом, чтобы предельная метрика содержала только δ–функциональную особенность.

4. Найти светоподобные геодезические в полученной метрике. Предложить способ экспериментального обнаружения быстро летящих черных дыр.

7. Доменная стенка в пространстве АдС

Пятимерное пространство Анти–де–Ситтера обладает метрикой

$$ds^2 = \mathrm{e}^{-2kz}\,\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dz^2 \;, \tag{1}$$

где k называется радиусом АдС.

Рассмотрим теорию гравитирующего скалярного поля Φ в $D = 5$ измерениях:

$$S = \int d^5x\sqrt{-g}\left[-\frac{R}{2\kappa} + \frac{1}{2}g^{MN}\partial_M\Phi\partial_N\Phi - U(\Phi)\right] \;,$$

где κ — пятимерная постоянная Ньютона; потенциал поля равен

$$U(\Phi) = \frac{\lambda}{4}(\Phi^2 - v^2)^2 - \frac{\kappa\lambda}{27}\Phi^2(\Phi^2 - 3v^2)^2 \;.$$

1. Найти самосогласованное решение уравнений ОТО и уравнений поля — гравитирующую доменную стенку. Далее будем считать, что стенка находится при $z \approx 0$.

2. Показать, что метрика доменной стенки стремится к (1) при $z \to +\infty$. Таким образом, стенка погружена в АдС. Какая метрика получается при $z \to -\infty$?

3. Показать, что в пределе исчезающе малой тощины стенка превращается во времениподобную оболочку, удовлетворяющую условиям Израэля.

4. Показать, что в спектре малых возмущений на фоне бесконечно тонкой стенки присутствует безмассовая тензорная мода.
   Примечание. Безмассовой тензорной модой назовем возмущение $h_{AB}(x, z)$, удовлетворяющее
   $$h_{55} = h_{5\mu} = \partial^\mu h_{\mu\nu} = h^\mu_\mu = 0 \;, \qquad \partial_\mu\partial^\mu h_{\lambda\rho} = 0 \;.$$

8. Черная струна в бранном мире

Добро пожаловать в бранный мир Рэндалл–Сандрума, обладающий метрикой

$$ds^2 = \mathrm{e}^{-k|z|}\,\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dz^2 \;. \tag{2}$$

Здесь x^μ — обычные четырехмерные координаты, z — координата вдоль дополнительного измерения.

1. Показать, что при $z \neq 0$ метрика (2) удовлетворяет уравнениям Эйнштейна с отрицательной космологической постоянной Λ_5. Показать, что в плоскости $z = 0$ находится бесконечно тонкая оболочка, найти ее тензор энергии–импульса.

2. Является ли пространство (2) геодезически полным?

3. Найти черную струну, погруженную в пространство (2) — статическое сферически–симметричное решение уравнений ОТО, вытянутое вдоль дополнительного измерения. Для четырехмерного наблюдателя такая струна будет неотличима от черной дыры.

4. Показать, что струна сингулярна.

9. Фотонная звезда

Рассмотрим звезду с уравнением состояния

$$p = w\rho \ , \qquad \text{где} \qquad w = 1/3 \ . \tag{3}$$

1. Найти точное сингулярное решение уравнения Толмана–Волкова–Оппенхеймера, а также решения, близкие к сингулярному.

2. Пусть уравнение состояния (3) выполняется в области $\rho_1 < \rho < \rho_0$, где при $\rho = \rho_1$ расположена тонкая безмассовая оболочка звезды, а $\rho > \rho_2$ соответствует плотной сердцевине радиуса r_0 и массы m_0. Найти гравитационную массу звезды, считая, что r_0 крайне мало, а $\rho_0 \sim 1/r_0^2$.

3. Найти массу звезды численно при $\rho_0 \ll 1/r_0^2$.

10. Камикадзе против черной дыры

Бесконечный набор камикадзе падает на черную дыру по времениподобным геодезическим, стартующим из бесконечности с нулевой начальной скоростью. Далее будем считать, что массы камикадзе равны нулю, а их геодезические образуют конгруэнцию.

Введем скалярные поля ψ_i, взаимодействующие с камикадзе следующим образом:

$$S_i = \frac{1}{2}\int \sqrt{-g}\, d^4x \left[(\partial_\mu\psi_i)^2 + \epsilon_i(u^\mu\partial_\mu\psi_i)^2\right] \ ,$$

где u^μ — скорость камикадзе, ϵ_i — свободные параметры.

1. Вычислить спектр излучения черной дыры для полей ψ_i. Является ли он планковским?

2. Используя ψ_i, построить вечный двигатель второго рода.

11. Статическое пространство

Дано статическое сферически–симметричное пространство

$$ds^2 = f(r)\, dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2 d\Omega^2 \ , \qquad \text{где} \quad f(r) = 1 - (kr)^2 \ . \tag{4}$$

1. Показать, что пространство (4) не является геодезически полным.

2. Рассматривая радиальные светоподобные геодезические, ввести координаты, покрывающие все пространство.

3. Предложить физическую интерпретацию метрики (4).

12. Космологические решения

1. Нарисовать диаграммы Пенроуза для космологических решений. Рассмотреть случаи открытой, замкнутой и плоской Вселенных на материальной и радиационно–доминированной стадиях, а также на стадии ускоренного расширения.

2. Обозначить на диаграммах горизонты частиц и горизонты событий для различных наблюдателей.

13. Глухая дыра

Рассмотрим одномерную жидкость, стационарно сливающуюся в сток со скоростью $v(x)$.

1. Выписать уравнение, описывающее акустические колебания в жидкости. Для простоты полагать, что скорость звука постоянна.

2. При каких условиях присутствует глухая дыра — область пространства, звуки из которой не доносятся до удаленного наблюдателя?

3. Вычислить спектр фононов, испускаемых глухой дырой.
   Примечание. Фононом называется квант звука.