Квантовая теория поля - 4 курс, весенний семестр
Задачи к зачету – 2010

Примечание. Если явно не оговорено, то температура и плотность равны нулю.

1. **Модель на сфере.**
   Рассмотрим теорию двух скалярных полей на 3-сфере радиуса r в минковском времени. Древесный скалярный потенциал имеет вид
   $$V(\phi,\chi) = h^2\phi^2\chi^2 + \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2 \ .$$
   Найти однопетлевой вклад в эффективный потенциал поля ϕ, который дает поле χ. Считать, что $\lambda \ll h^2 \ll 1$, тогда этот и древесный вклады — главные. Происходит ли восстановление симметрии при малых r?

2. **Модель с фермионами на сфере.**
   То же, что в первой задаче, но вместо поля χ расссмотреть фермионное поле ψ, взаимодействующее юкавским образом:
   $$\mathcal{L}_{\psi\phi} = h\bar{\psi}\psi\phi$$

3. **Модель на гиперболоиде.**
   То же, что в первой задаче, но на 3–гиперболоиде радиуса кривизны r.

4. **Дебаевский радиус.**
   Методами теории поля найти дебаевский радиус в электронейтральной среде релятивистских электронов и нерелятивистских протонов с заданной плотностью $n_p = n_e$ при нулевой температуре.

5. **Термодинамический потенциал в $(1+1)$–мерной модели.**
   Найти в низшем нетривиальном порядке по полю однопетлевой вклад в большой термодинамический потенциал фермионов во внешнем статическом поле $A_1(x^1)$ при конечных температуре и плотности фермионного числа в (1+1)-мерной теории с безмассовыми фермионами и взаимодействием
   $$\mathcal{L}_{\psi A} = g\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^3\psi A_\mu \ ,$$
   где γ^3 — двумерный аналог γ^5-матрицы.

6. **Аномалия в квантовой механике.**
   Рассмотрим трехмерную нерелятивистскую частицу в сферически–симметричном потенциале
   $$V(r) = -\frac{\beta}{r^2} \ . \tag{1}$$

(a) Показать, что уравнение Шредингера, описывающее движение такой частицы, инвариантно относительно дилатационных преобразований $r \to \lambda r$. Какой вывод можно сделать про дискретную часть спектра в модели (1)?

(b) Пусть потенциал (1) регуляризован при $r \approx 0$. Найти энергии и волновые функции высоколежащих состояний с орбитальным моментом l.
Примечание. Под высоколежащими состояниями здесь понимаются состояния, не локализованные в «регуляризованной» области $r \approx 0$.

7. **Фотон в модели Швингера.**
Найти пропагатор фотона во всех порядках теории возмущений в квантовой электродинамике с безмассовыми фермионами в (1+1)–мерном пространстве-времени. Дать интерпретацию полученному результату в терминах аксиальной аномалии.
Указание: использовать калибровку $\partial_\mu A^\mu = 0$.

8. **Бозонная струна в искривленном пространстве–времени.**
Рассмотрим бозонную струну, распространяющуюся в пространстве–времени с метрикой $G_{AB}(X)$. Действие модели запишем в виде

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h}\, h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^A \partial_\beta X^B G_{AB}(X)\ . \qquad (2)$$

Здесь $h_{\alpha\beta}(\sigma)$ и σ_α — метрика и координаты на мировой поверхности струны соответственно; $\alpha = 0, 1$. Поля $X^A(\sigma)$, $A = 0, \ldots, 25$ представляют собой координаты струны в объемлющем пространстве.

(a) Найти размерности полей и константы α'.

(b) Показать, что с помощью калибровочных преобразований метрику на поверхности струны можно привести к виду

$$h_{\alpha\beta} = \mathrm{e}^{2\varphi(\sigma)} \eta_{\alpha\beta}\ . \qquad (3)$$

Будем называть (3) конформной калибровкой.

(c) Проверить, что в конформной калибровке действие (2) не зависит от φ. Таким образом, преобразование $h_{\alpha\beta} \to \Lambda^2(\sigma) h_{\alpha\beta}$ является калибровочной симметрией теории. Будем называть ее вейлевской симметрией.

(d) Показать, что размерная регуляризация разрушает вейлевскую инвариантность. Это означает, что в модели (2), вообще говоря, присутствует калибровочная аномалия, что говорит о внутренней противоречивости теории.

Указание. Выписать действие для струны с d–мерной мировой поверхностью в калибровке (3).

(e) Вычислить однопетлевое эффективное действие в конформной калибровке. Показать, что возникающие при этом расходимости можно убрать перенормировкой волновой функции $X^A \to V^A + M^A_B X^B$, где M^A_B и V^A — бесконечные матрица и вектор.

Указание 1. Воспользоваться методом фонового поля: $X^A(\sigma) = Y^A(\sigma) + x^A(\sigma)$, где $Y^A(\sigma)$ — фоновые поля, удовлетворяющие классическим уравнениям поля, а $x^A(\sigma)$ — квантовые возмущения.

Указание 2. Для простоты считать, что фоновые поля почти постоянны: $Y^A(\sigma) = Y_0^A + y^A(x)$, $y^A \ll Y_0^A$. В этом случае можно вычислить лишь часть эффективного действия, квадратичную по полям y, а затем догадаться до полного (ковариантного) эффективного действия.

Указание 3. Проще всего использовать гауссовы нормальные координаты X^A с центром в точке $X^A = Y_0^A$.

(f) Каким условиям должна удовлетворять метрика G_{AB}, чтобы эффективное действие не зависело от φ?

9. **Гравитационная киральная аномалия.**
Рассмотрим четырехмерные безмассовые фермионы в искривленном пространстве–времени с метрикой $g_{\mu\nu}$.

(a) Показать, что действие модели инвариантно относительно киральных преобразований $\psi \to \mathrm{e}^{i\alpha\gamma_5}\psi$.

(b) Рассматривая функциональный интеграл для фермионов, вычислить гравитационный вклад в киральную аномалию.
Подсказка 1. Для вычислений в окрестности некоторой точки $x = x_0$ удобно использовать гауссову нормальную систему координат, где

$$e^a_\mu(x_0) = \delta^a_\mu \ , \qquad \nabla_\nu e^a_\mu\Big|_{x=x_0} = 0 \ , \qquad \left(\nabla_\lambda\nabla_\nu + \nabla_\nu\nabla_\lambda\right) e^a_\mu\Big|_{x=x_0} = 0 \ ,$$

$e^a_\mu(x)$ — тетрада. Покажите, что такая система координат существует.
Подсказка 2. Полезно научиться вычислять матричный элемент

$$Z = \int dx \, \langle x|\mathrm{e}^{-H}|x\rangle \ , \qquad \text{где} \qquad H = \left(-i\partial_\mu + A_{\mu\nu}x^\nu\right)^2 \ ,$$

где $A_{\mu\nu}$ — маленькие константы. Это можно сделать, вообразив, к примеру, что оператор H является гамильтонианом нерелятивистской частицы, а Z — аналогом статистической суммы. Тогда Z можно вычислить методом функционального интеграла.

10. **Сумасшедшие ученые в темноте.**
Рассмотрим КХД с двумя кварками, u и d, массы которых равны m_u и m_d соотвественно. Вообще говоря, лагранжиан содержит также θ–член, связанный с наличием θ–вакуума,

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{\theta}{16\pi^2} \mathrm{tr}\, G_{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu} \ ,$$

где $G_{\mu\nu}$ — напряженность глюонного поля. Из общих соображений можно ожидать, что $\theta \sim 1$. Однако, экспериментальные результаты говорят об обратном:

$\theta_{ex} < 10^{-9}$. Это неожиданно маленькое значение параметра модели можно объяснить, добавив в модель псевдоскалярную частицу — аксион:

$$\mathcal{L}_a = \frac{1}{2}(\partial_\mu a)^2 + \frac{a(x)}{f_a}\,\mathrm{tr}\,G_{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu}\ ,$$

где f_a характеризует взаимодействие аксиона с глюонным полем. Рассмотрим теорию с лагранжианом $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{QCD} + \mathcal{L}_\theta + \mathcal{L}_a$.

(a) Показать, что в случае, когда масса одного из кварков равна нулю, функциональный интеграл теории инвариантен относительно глобальных преобразований $a(x) \to a(x) + \alpha$, дополненных соответствующими преобразованиями других полей.

(b) В первом неисчезающем порядке по $1/f_a$ и считая, что m_u, $m_d \ll \mu$, найти эффективный потенциал поля аксиона. Здесь

$$\mu^3 = -\langle \bar{u}u\rangle = -\langle \bar{d}d\rangle$$

обозначает (известный) кварковый конденсат. Найти вакуумы модели и массу аксиона. Показать, что введение аксионного поля позволяет решить проблему большого θ–члена.

Замечание. КХД находится в сильной связи, поэтому для нахождения эффективного потенциала нельзя использовать разложение по константе сильных взаимодействий. Вместо этого предлагается воспользоваться феноменологически известным значением кваркового конденсата и соотношением $\langle \bar{u}\gamma^5 u\rangle = \langle \bar{d}\gamma^5 d\rangle = 0$.

(c) Добавим в модель электромагнитное поле, где заряд аксиона на древесном уровне считается равным нулю. В главном порядке по $1/f_a$ найти лагранжиан взаимодействия аксиона с электромагнитным полем.

(d) Представим себе следующий эксперимент. Луч лазера светит в непроницаемую стену, за которой в кромешной тьме сидят сумасшедшие ученые и пытаются что–то разглядеть. Экспериментальная установка (лазер + ученые) помещена в однородное магнитное поле. Используя эффективный лагранжиан для аксионного поля, найти вероятность того, что ученые увидят зеленых человечков.