

**Фундаментальные представления  
современной физики:  
от взаимодействий элементарных  
частиц до структуры и эволюции  
Вселенной**

Лекция 2

# Классическая физика

$$\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} \equiv v$$

$$\frac{dv}{dt} \equiv \dot{v} \equiv \ddot{x} \equiv a$$

# Законы Ньютона

$$m a = F$$

Как устроена  
классическая механика:  
(Ньютон, Эйлер, Лагранж,  
Гамильтон, Пуассон...)

координаты  $q = q(t)$  ,

импульсы  $p = p(t)$ ;

наблюдаемые – функции  
координат и импульсов:

$g(p, q)$ ,

энергия  $E = h(p, q)$

состояние системы:  $(\underline{p}, \underline{q})$

значение наблюдаемой  $g$

в состоянии  $(\underline{p}, \underline{q})$ :

$$g(\underline{p}, \underline{q})$$

- Закон эволюции:
- $\dot{g} = \{ g, h \}$
- Скобка Пуассона

Измерение  
с точки зрения  
классической физики

**Постулат:  
одновременно  
можно измерить  
сколь угодно точно  
любое число  
величин**

**П.Н. Лебедев:**

**Экспериментальное  
открытие давления света.  
1900 г.**

**Макс Планк:**

излучение абсолютно чёрного тела.

1900 г.

$$\varepsilon = \hbar\omega, \quad \hbar = 1,054 \times 10^{-27} \text{ Эрг}\cdot\text{с}$$

**А. Эйнштейн:**

теория фотоэффекта

Фотон 1905 г.

Электромагнитная волна  
(или фотоны)  
при взаимодействии с  
телом  
передают ему импульс.

Солнечный парус

# Ревизия понятия «Измерения»

с точки зрения  
квантовой физики

Измерение –  
взаимодействие прибора  
с объектом измерения.

**Невозможно одновременно  
измерить абсолютно точно  
координату и импульс  
частицы !**

# Принцип неопределённостей:

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar$$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$



# Квантовая механика

# Квантовая механика 1925 г.

Наблюдаемые –  
операторы  
(матрицы)



Вернер Гейзенберг  
(1901 – 1976)

Как вычислить  
средние значения  
наблюдаемых.

Оператор состояния  
1927 г.



Джон фон Нейман  
(1903 – 1957)

**П. Дирак:**

**Как связана  
квантовая теория  
с классической**

**Эволюция  
наблюдаемых во времени**

# Коммутаторы и антикоммутаторы операторов.



Поль А.М. Дирак  
(1902 – 1984)

Как устроена квантовая механика:

оператор координаты      Q  
оператор импульса      P

$$[Q, P] = Q P - P Q = i \hbar I$$

все наблюдаемые –  
операторы:

$$G = g (P, Q),$$

оператор энергии:

$$H = h (P, Q)$$

# Как устроена квантовая механика:

ЭВОЛЮЦИЯ:  $Q(t)$ ,  $P(t)$ ;  $G(t)$

$$\dot{G} = i [H, G] = i (HG - GH)$$

Как устроена квантовая механика:

СОСТОЯНИЕ СИСТЕМЫ:

оператор  $N$

*или*

*вектор в абстрактном*

*пространстве  $\Psi$*

среднее значение

наблюдаемой  $G$

в состоянии  $N$  ( $\Psi$ ):

$\text{Tr}(GN)$  или  $(\Psi, G\Psi)$



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A + \lambda B =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda b_{11} & \lambda b_{12} & \lambda b_{13} \\ \lambda b_{21} & \lambda b_{22} & \lambda b_{23} \\ \lambda b_{31} & \lambda b_{32} & \lambda b_{33} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} + \lambda b_{11} & a_{12} + \lambda b_{12} & a_{13} + \lambda b_{13} \\ a_{21} + \lambda b_{21} & a_{22} + \lambda b_{22} & a_{23} + \lambda b_{23} \\ a_{31} + \lambda b_{31} & a_{32} + \lambda b_{32} & a_{33} + \lambda b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} & a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} \cdot b_{33} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} & a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} & a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} + a_{33} \cdot b_{33} \end{pmatrix}$$

$$(AB)_{.1} =$$

$$\begin{aligned} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ & a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} \end{aligned}$$

$$(AB)_{.2} =$$

$$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$$

$$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$$

$$a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}$$

$$(AB)_{.3} =$$

$$a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$$

$$a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$$

$$a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AI = IA = A$$

$$\text{Tr} A = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q = 0$$

$$q(t) = q_0 \sin(\omega t + \phi)$$

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2M} + \frac{M\omega^2}{2} q^2, \quad M = 1.$$

$$H = \frac{P^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} Q^2$$

$$[Q, P] = i\hbar I$$

$$\Psi = \psi(x), \quad Q\psi(x) = x\psi(x)$$

$$P\psi(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)$$

$$a^{-} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega Q + iP)$$

$$a^{+} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega Q - iP)$$

$$[a^{-}, a^{+}] = 1$$

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} (a^- a^+ + a^+ a^-) =$$

$$\hbar\omega a^+ a^- + \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$[a^-, H] = \hbar\omega a^-$$

$$[a^+, H] = -\hbar\omega a^+$$

$$a^- : E \Rightarrow E - \hbar\omega$$

$$a^+ : E \Rightarrow E + \hbar\omega$$

$$H\psi_n = E_n\psi_n$$

$$a^-\psi_0 = 0$$

$$\psi_0, \quad \psi_1 \sim a^+ \psi_0, \dots,$$
$$\psi_n \sim (a^+)^n \psi_0, \dots$$

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}, E_1 = \hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2}, \dots,$$
$$E_n = n\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2}, \dots$$

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \psi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots$$

$$\varphi = C_0\psi_0 + C_1\psi_1 + \dots = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$a^- = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$a^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$a^+ a^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$H = \hbar\omega a^+ a^- + \frac{\hbar\omega}{2} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\hbar\omega}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{3}{2}\hbar\omega & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{5}{2}\hbar\omega & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2}\hbar\omega & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\psi_0(x) = C \exp\left(-\frac{\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

$$|\psi(x)|^2 \neq 0, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$H_F = \frac{\hbar\omega}{2} (a^+ a^- - a^- a^+)$$

$$[a^-, H_F] = \hbar\omega a^-$$

$$[a^+, H_F] = -\hbar\omega a^+$$

$$a^- : E \Rightarrow E - \hbar\omega$$

$$a^+ : E \Rightarrow E + \hbar\omega$$

$$\{a^-, a^+\} = a^- a^+ + a^+ a^- = 1$$

$$(a^-)^2 = (a^+)^2 = 0$$

$$H_F = \hbar\omega a^+ a^- - \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$a^- \psi_0 = 0, \quad a^+ \psi_0 = \psi_1$$
$$a^+ \psi_1 = 0$$

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$