Задачи к семинарам по курсу
"Численные методы" для 443 группы
кафедры физики частиц и космологии

к лекции 2 "Методы решения задач линейной алгебры"

2.1 Оценить ошибку округления при решении невырожденной системы линейных уравнений двумя способами:

- методом Гаусса-Жордана
- используя обратную матрицу, вычисленную методом Гаусса-Жордана

2.2 Оценить сложность алгоритма и ошибку округления при вычислении определителя матрицы двумя способами:

- по определению
- методом Гаусса-Жордана

2.3 Сравнить сложность алгоритма Гаусса-Жордана и LU-разложения для решения следующих задач:

- вычисление определителя
- вычисление обратной матрицы
- решение уравнения $A\,x = b$
- решение уравнения $A\,x = b^i$ для M различных правых частей b^i

2.4 Получить формулы для LU-разложения трехдиагональной матрицы. Оценить сложность алгоритма.

2.5 Для сингулярного разложения квадратной матрицы $A = U\ \mathrm{diag}(w_j)\ V^+$ доказать, что:

- столбцы матрицы U соответствующие ненулевым сингулярным числам образуют ортонормированный базис в $\mathrm{Im}\ A$;
- столбцы матрицы V соответствующие нулевым сингулярным числам образуют ортонормированный базис в $\mathrm{Ker}\ A$;
- пусть $b \in \mathrm{Im}\ A$. Определим псевдообратную матрицу $\tilde{A} = V\ \mathrm{diag}(1/w_j)\ U^+$. Показать, что $x = \tilde{A}\,b$ является решением уравнения $A\,x = b$ с наименьшей нормой, если в выражении для $\tilde{A}$ заменить нулями все $1/w_j$ для нулевых сингулярных чисел;
- пусть $b \notin \mathrm{Im}\ A$. Показать, что решение x, определенное в предыдущем пункте, минимизирует $|Ax - b|^2$.