

Задачи к экзамену по спецкурсу “Квантовая теория поля” для 5 курса физического факультета МГУ, осенний семестр 2009 г.

1. Майорановские нейтрино

а) Убедиться, что спиральность сохраняется при эволюции ультрарелятивистских майорановских нейтрино. Показать, что в пределе $m/E \rightarrow 0$, состояние с левой спиральностью совпадает с нейтрино, а состояние с правой спиральностью — с антинейтрино.

б) Убедиться, что в ультрарелятивистском случае, недиагональная майорановская массовая матрица приводит к осцилляциям между состояниями только левой или только правой спиральности.

2. Бета-функция для константы самодействия

Вычислить бета-функцию для константы самодействия бозона Хиггса β_λ в Стандартной Модели в одной петле

3. Унитарный предел для массы Хиггса

Найти ограничение сверху на массу бозона Хиггса из условия унитарности амплитуды процесса рассеяния $W^+W^- \rightarrow W^+W^-$ в древесном приближении в Стандартной Модели.

4. Аксион-фотонные осцилляции

Добавим в лагранжиан КЭД взаимодействие со псевдоскалярным полем a (“аксионом”) следующего вида

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{1}{f_a} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (1)$$

Показать, что в постоянном однородном магнитном поле \vec{H} “аксион” будет испытывать осцилляции в фотон $a \rightarrow \gamma$ и обратно. Найти длину этих осцилляций в ультрарелятивистском приближении, считая магнитное поле достаточно малым.

5. Аномалия в аксиальном токе

Используя уравнение для аномалии в аксиальном токе

$$\partial^\mu [\bar{q}\gamma_\mu\gamma_5q] = 2im_q\bar{q}\gamma_5q + \frac{g^2}{8\pi} \text{Tr}G_{\mu\nu}\tilde{G}^{\mu\nu}, \quad (2)$$

где G_μ — напряженность глюонного поля, а g — калибровочная константа сильных взаимодействий и ограничиваясь двумя типами кварков u и d , оценить в киральной теории матричные элементы $\langle 0 | \frac{g^2}{8\pi} \text{Tr}G_{\mu\nu}\tilde{G}^{\mu\nu} | \pi^\pm \rangle$ и $\langle 0 | \frac{g^2}{8\pi} \text{Tr}G_{\mu\nu}\tilde{G}^{\mu\nu} | \pi^0 \rangle$.

6. CP-нарушение в Стандартной Модели

Показать, что в Стандартной Модели при наличии CP-нарушения бозоны K^0 и \bar{K}^0 уже не являются массовыми состояниями. Оценить амплитуду перехода K^0 в \bar{K}^0 в Стандартной модели. Оценить разность масс массовых состояний каонов в киральной теории.

7. Солитоны в скалярной теории поля на некоммутативной сфере (fuzzy sphere).

Рассмотрим пространство \mathbb{R}^3 с координатами x^a , $a = 1, 2, 3$ и евклидовой метрикой $g_{ab} = \delta_{ab}$ [Madore, Class.Quant.Grav.9:69-88,1992]. Рассмотрим сферу S^2

$$g_{ab} x^a x^b = r^2. \quad (3)$$

Пусть $\mathcal{C}(S^2)$ алгебра комплекснозначных функций на сфере, которая допускает полиномиальное разложение по x^a

$$f(x^a) = f_0 + f_a x^a + \frac{1}{2} f_{a_1 a_2} x^{a_1} x^{a_2} + \dots$$

Оборвем разложение до $(n-1)$ -ой степени

$$f(x^a) = f_0 + f_a x^a + \frac{1}{2} f_{a_1 a_2} x^{a_1} x^{a_2} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f_{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} x^{a_1} x^{a_2} \dots x^{a_{n-1}}. \quad (4)$$

Линейное пространство полиномов $(n-1)$ -ой степени назовем $\mathcal{C}_n(S^2)$. Тензор $f_{a_1 a_2 \dots a_k}$, $0 \leq k \leq n-1$ можно выбрать симметричным по всем индексам. Свертку $f_{a_1 a_2 \dots a_k}$ по любым двум индексам можно выбрать равной 0, используя (3).

Любой полином вида (4) можно разложить по базису сферических функций:

$$f(x^a) = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_{lm}(\Omega), \quad f_{lm} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} f(x^a) Y_{lm}^*.$$

Зададим умножение на пространстве полиномов (4). Для этого поставим в соответствие каждому полиному комплексную матрицу $n \times n$ по следующему правилу: в разложении (4) заменим x^a на $\hat{x}^a = \varkappa \hat{J}^a$, где \hat{J}^a генераторы n -мерного неприводимого представления алгебры $SU(2)$

$$[\hat{J}^a, \hat{J}^b] = i\varepsilon^{abc} \hat{J}^c.$$

Коэффициент \varkappa выбирается так, чтобы удовлетворялась связь (3).

$$\varkappa^2 \hat{J}^a \hat{J}^a = r^2 \Rightarrow \varkappa = \frac{2r}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Введем операторы дифференцирования

$$L_a \hat{f} \equiv [\hat{J}_a, \hat{f}]$$

Запишем действие теории скалярного поля на некоммутативной сфере в виде:

$$L(\hat{\varphi}, \partial_t \hat{\varphi}) = \frac{4\pi r^2}{n} \frac{1}{2} \text{Tr} \left((\partial_t \hat{\varphi})^2 + \frac{1}{r^2} [\hat{J}_a \hat{\varphi}] [\hat{J}_a \hat{\varphi}] - g \hat{\varphi}^2 \left(\lambda - \frac{2}{3} \hat{\varphi} \right) \right). \quad (5)$$

- Получить действие теории в коммутативном пределе: $n \rightarrow \infty$ при фиксированном r .
- Получить действие теории в плоском пределе: $n \rightarrow \infty$, $r^2 = \frac{n\theta}{2} \rightarrow \infty$, при фиксированном θ .
- Предположить, что потенциальный член в действии 5 доминирует над кинетическим и найти независимые от времени решения (солитоны) при произвольном n .