Задачи по курсу “Квантовая теория поля”. Аномалии. Функциональные методы. Квантование калибровочных теорий.

1. **Аномальное нарушение масштабной инвариантности.** Рассмотрим квантовую электродинамику в $(3+1)$-мерии с одним заряженным безмассовым фермионом
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2 + \bar{\psi} i\gamma_\mu(\partial_\mu - i\mathrm{e}A_\mu)\psi.$$
Теория инвариантна относительно глобальных масштабных преобразований
$$x \to \alpha x, \;\; \psi(x) \to \alpha^{3/2}\psi(\alpha x), \;\; A_\mu(x) \to \alpha A_\mu(\alpha x).$$
Найти классически сохраняющийся ток j_μ и бета-функцию $\beta(e)$ в этой теории. Найти выражение для $\partial_\mu j_\mu$ в однопетлевом приближении.

2. **Вычисление эффективного потенциала**. Рассмотрим теорию одного скалярного поля ϕ с потенциалом $V(\phi)$ в $(3+1)$-мерии. Сделаем в действии сдвиг
$$\phi \to \phi + \phi_0$$
где ϕ_0 — величина, не зависящая от координат. Используя методы функционального интегрирования показать, что эффективный потенциал в однопетлевом приближении может быть вычислен по следующей формуле
$$V^{(1)}(\phi_0) = V_{tree}(\phi_0) - \frac{1}{2}i\hbar \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln \mathrm{Det}(i\mathcal{D}^{-1}(\phi_0, k)),$$
где
$$i\mathcal{D}^{-1}(\phi_0, k) = \int d^4x \mathrm{e}^{ikx} i\mathcal{D}^{-1}(\phi, x, 0)$$
$$i\mathcal{D}^{-1}(\phi_0, x, y) = \left.\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\right|_{\phi=\phi_0},$$
$S[\phi]$ - классическое действие. Вычислить однопетлевой потенциал в теории $\frac{\lambda}{4!}\phi^4$. Перенормировать, сравнить с ответом, полученным на семинаре.

3. **Квантовая космология**. Рассмотрим замкнутую , пространственно-однородную вселенную. Метрика $g_{\mu\nu}$ такой вселенной может быть записана в виде
$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^2N^2 & 0 \\ 0 & -a^2\delta_{ij} \end{pmatrix},$$
где $a(\eta)$ - масштабный фактор (здесь используется конформное время), $N(\eta)$ - функция временного сдвига. Действие для динамических переменных a и N имеет следующий вид:
$$S = \int d\eta \left(-\frac{\dot{a}^2}{2N} + N(\frac{a^2}{2} - \Lambda a^4)\right),$$
где Λ — космологическая постоянная.

- Построить гамильтонов формализм, найти связи и калибровочную симметрию.
- Проквантовать систему в представлении Шредингера, накладывая связи 1-го рода на волновую функцию. Показать, что выполнено уравнение Уилера-Де Витта

$$H\Psi(a) = 0.$$

- Выписать функциональный интеграл для функций Грина этой системы.
- ******* Найти квазиклассические решения уравнения Уилера-Де Витта. Показать, что эволюция Вселенной происходит согласно уравнению Фридмана.

4. Вычислить однопетлевые β-функции в калибровочных теориях без материи с калибровочными группами $SU(N)$ и $SO(N)$ в 3+1 измерениях.

5. Проквантовать канонически электромагнитное поле.

6. Вывести выражение для пропагатора калибровочного поля в калибровке $n_\mu A_\mu = 0$, $n_\mu n_\mu = 1$, n_μ — фиксированный 4-вектор.

7. Вывести фейнмановские правила для неабелевой калибровочной теории, взаимодействующей со скалярным полем в присоединенном представлении калибровочной группы.

8. Проверить первое нетривиальное тождество Славнова-Тейлора в однопетлевом приближении для расходящихся частей при калибровочно-инвариантной регуляризации КХД.

9. Показать, что оптическая теорема выполнена в квантовой глюодинамике. Для этого вычислить явно мнимую часть какой-нибудь амплитуды рассеяния и соответствующее полное сечение в низшем неисчезающем порядке теории возмущений. Показать, что теория неунитарна, если не принимать в расчет духовые диаграммы.

10. Рассмотрим частицу на двумерной сфере:

$$S = \int dt \left(\dot{\mathbf{x}}^2/2 + \lambda(\mathbf{x^2 - 1}) \right) \ ,$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$, λ - множитель Лагранжа.

    (a) Выписать лагранжевы и гамильтоновы уравнения движения.

    (b) Проквантовать.