Задачи по курсу “Квантовая теория поля”, III курс, весенний семестр 2008/2009 учебного года.

1. Пусть есть два действительных скалярных поля φ, χ. Возьмем лагранжиан
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - m\mu\varphi\chi - \frac{M^2}{2}\chi^2 + \frac{c}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\chi\ .$$
Проквантовать (найти коммутационные соотношения и двухчастичные функции Грина). При каких значениях m, μ, M и c такая теория имеет смысл?

2. Дано фермионное поле ψ с лагранжианом
$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{m}{2}(\overline{\psi^C}\psi + \mathrm{h.c.})\ ,$$
где ψ^C — зарядово сопряженное поле.
   - Показать, что лагранжиан лоренц-инвариантен.
   - Найти общее решение уравнений поля.
   - Получить выражение для тензора энергии-импульса.
   - Проквантовать это поле (найти коммутационные соотношения между операторами рождения и уничтожения, а также между операторами поля; найти пропагатор).

3. Даны два действительных скалярных поля φ, χ с лагранжианом
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{1}{2}\chi^2 + g\varphi^2\chi\ .$$
Построить диаграммную технику по взаимодействию g. Показать подиаграммно, что модель эквивалентна теории одного скалярного поля с простым локальным самодействием. Найти лагранжиан эквивалентной теории.

4. Вычислить дифференциальное сечение $e^+e^- \to e^+e^-$ в теории Юкавы
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + g\bar{\psi}\psi\phi$$
в низшем порядке теории возмущений.

5. Найти закон преобразования операторов рождения и уничтожения $\phi^\pm(\mathbf{k})$ и $\phi^{*\pm}(\mathbf{k})$ в теории свободного комплексного скалярного поля относительно 1) преобразований группы Пуанкаре; 2) относительно $U(1)$-преобразований.

6. В теории свободного комплексного скалярного поля вычислить величину $\langle\mathbf{x}|j_0(y)|\mathbf{x}\rangle$, где j_0 - нулевая компонента сохраняющегося $U(1)$-тока, а
$$|\mathbf{x}\rangle = \phi^+(\mathbf{x}, 0)|0\rangle.$$
Оценить размер области, в которой локализован заряд в таком состоянии.

7. Используя операторы рождения и уничтожения, построить унитарный оператор, реализующий преобразование четности для скалярного и псевдоскалярного полей, соответственно
$$\mathcal{P}\phi(\mathbf{x}, t)\mathcal{P}^{-1} = \pm\phi(-\mathbf{x}, t)$$
и $\mathcal{P}|0\rangle = |0\rangle$.

8. В теории с лагранжианом
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$
вычислить амплитуды $1 \to 5$, $1 \to 7$, $1 \to 9$, $2 \to 4$, $2 \to 6$ и $2 \to 8$ в древесном приближении, где в конечных состояниях все частицы - реальные и имеют нулевые пространственные импульсы (рождение на пороге).

9. В теории вещественного скалярного поля с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{(2n+1)!}\phi^{2n+1} - \frac{4n+1}{2((2n+1)!)^2}\frac{\lambda^2}{m^2}\phi^{4n}$$

вычислить в древесном приближении амплитуду перехода $2n \to 2n$, где все частицы находятся на массовой поверхности, причем частицы в конечном состоянии рождаются на кинематическом пороге.

10. Рассмотреть теорию N вещественных скалярных полей в лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \partial_\mu \phi_i \partial_\mu \phi_i - \frac{m^2}{2}\sum_{i=1}^{N}\phi_i^2 - \frac{\lambda}{4!}\left(\sum_{i=1}^{N}\phi_i^2\right)^2.$$

1) Найти группу симметрий теории. 2) Вычислить в древесном приближении амплитуды перехода $2 \to 2$, $2 \to 6$, $2 \to 8$, где все частицы находятся на массовой поверхности, причем частицы в конечном состоянии рождаются на кинематическом пороге. В качестве начального состояния взять две частицы одного и того же поля. Обобщить результат на случай произвольного числа частиц в конечном состоянии.

11. Рассмотреть теорию двух массивных вещественных скалярных полей с потенциалом

$$\mathcal{V} = \frac{g}{2}\phi_1^2\phi_2^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_2^4.$$

В древесном приближении получить амплитуду рождения $n = 4, 6, 8$ частиц поля ϕ_2 в столкновении двух частиц поля ϕ_1, причем все частицы находятся на массовой поверхности, а частицы в конечном состоянии рождаются на кинематическом пороге. Вычислить вышеуказанные амплитуды при $g = \frac{\lambda}{3}$ и $g = 2\lambda$. Обобщить результат на произвольные g и λ.

12. Рассмотреть теорию дираковского фермиона и вещественного скалярного поля со спонтанным нарушением симметрии,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{m^2}{2}\phi^2 - g\phi\bar{\psi}\psi - \frac{\lambda}{4!}\phi^4.$$

Получить в древесном приближении амплитуду перехода фермионов в частицы скалярного поля ϕ (возбуждения над правильным вакуумным состоянием), $\psi\bar{\psi} \to n\phi$, $n = 4, 6, 8$, причем все частицы находятся на массовой поверхности, а частицы в конечном состоянии рождаются на кинематическом пороге. Вычислить вышеуказанные амплитуды при $\lambda = 3g^2$ и $3\lambda = g^2$. Обобщить результат на произвольные g и λ.

13. В теории Ферми, справедливой при низких энергиях, взаимодействие лептонов представляется в виде четырехфермионного взаимодействия с лагранжианом:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\, l_\mu^\dagger l^\mu,$$

где лептонный ток l_μ имеет структуру:

$$l_\mu = \bar{\psi}_l \gamma_\mu (1+\gamma_5)\nu_l, \qquad l = e, \mu$$

Вычислить сечение рассеяния процесса $\mu^- + \nu_e \to e^- + \nu_\mu$.

14. В кварковой модели легкие адроны состоят из трех типов кварков u, d и s. Будем считать кварки безмассовыми и образующими триплет относительно группы SU(3), являющейся группой глобальной симметрии теории. Для состояний мезонов с орбитальным моментом 0, барионов ($s = 1/2$, $s = 3/2$) найти связь между спином, четностью и представлением $SU(3)$, в котором они находятся.

15. Вычислить сечение рассеяния π^+ на протоне в теории пион-нуклонного взаимодействия с лагранжианом $\mathcal{L}_{int} = g\bar{\Psi}\gamma^5\vec{\sigma}\Psi\vec{\pi}$, где $\Psi = (\psi_p, \psi_n)$ — изодублет нуклонов, а $\vec{\pi}$ — псевдоскалярный изотриплет мезонов. Нуклоны находятся в фундаментальном представлении изотопической группы SU(2), а мезоны в присоединенном.

16. Рассмотрим киральную теорию, взаимодействующую с легким псевдоскаляром P. Полный лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial P)^2 + \frac{1}{2}m_P^2 P^2 + \frac{f^2}{8}\mathrm{Tr}\left(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U + U^\dagger \chi + \chi^\dagger U\right), \quad \chi = 2B_0\left(\Sigma + hP\right),$$

где B_0 и f — размерные константы, h — 3×3 эрмитова константа безразмерных констант взаимодействия, Σ — 3×3 эрмитова матрица, содержащая массы u, d и s кварков, а 3×3 унитарная матрица U содержит поля легких псевдоскалярных мезонов

$$U = \exp\left(i2\Phi/f\right), \quad \Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta \end{pmatrix}.$$

(a) Найти группу симметрий теории.

(b) Определить массы мезонов, полагая $B_0 = 2$ ГэВ, $m_u = 5$МэВ, $m_d = 10$ МэВ, $m_s = 130$ МэВ. Сравнить с экспериментальными значениями.

(c) Вычислить в древесном порядке ширины распадов $K^+ \to \pi^+\pi^0 P$ и $K_{L,S} \to \pi\pi P$, где $K_S = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(K^0 + \bar{K}^0\right)$, $K_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(K^0 - \bar{K}^0\right)$. Объяснить полученный результат.

17. **Солитоны в скалярной теории поля на некоммутативной сфере (fuzzy sphere).**

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами $x^a, a = 1,2,3$ и евклидовой метрикой $g_{ab} = \delta_{ab}$ [Madore,Class.Quant.Grav.9:69-88,1992]. Рассмотрим сферу S^2

$$g_{ab}\, x^a x^b = r^2. \tag{1}$$

Пусть $\mathcal{C}(\mathrm{S}^2)$ алгебра комплекснозначных функций на сфере, которая допускает полиномиальное разложение по x^a

$$f(x^a) = f_0 + f_a x^a + \frac{1}{2} f_{a_1 a_2} x^{a_1} x^{a_2} + \ldots$$

Оборвем разложение до $(n-1)$-ой степени

$$f(x^a) = f_0 + f_a x^a + \frac{1}{2} f_{a_1 a_2} x^{a_1} x^{a_2} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} f_{a_1 a_2 .. a_{n-1}} x^{a_1} x^{a_2} .. x^{a_{n-1}}. \tag{2}$$

Линейное пространство полиномов $(n-1)$-ой степени назовем $\mathcal{C}_n(\mathrm{S}^2)$. Тензор $f_{a_1 a_2 .. a_k}, 0 \le k \le n-1$ можно выбрать симметричным по всем индексам. Свертку $f_{a_1 a_2 .. a_k}$ по любым двум индексам можно выбрать равной 0, используя (1).

Любой полином вида (2) можно разложить по базису сферических функций:

$$f(x^a) = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{l} f_{lm} Y_{lm}(\Omega), \qquad f_{lm} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} f(x^a) Y^*_{lm}.$$

Зададим умножение на пространстве полиномов (2). Для этого поставим в соответствие каждому полиному комплексную матрицу $n\times n$ по следующему правилу: в разложении (2) заменим x^a на $\hat{x}^\alpha = \varkappa \hat{J}^a$, где $\hat{J}^a$ генераторы n - мерного неприводимого представления алгебры $SU(2)$

$$[\hat{J}^a, \hat{J}^b] = i\varepsilon^{abc}\hat{J}^c.$$

Коэффициент $\varkappa$ выбирается так, чтобы удовлетворялась связь (1).

$$\varkappa^2 \hat{J}^a \hat{J}^a = r^2 \quad \Rightarrow \quad \varkappa = \frac{2r}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Введем операторы дифференцирования

$$L_a \hat{f} \equiv [\hat{J}_a, \hat{f}]$$

Запишем действие теории скалярного поля на некоммутативной сфере в виде:

$$L(\hat{\varphi}, \partial_t \hat{\varphi}) = \frac{4\pi r^2}{n} \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \left((\partial_t \hat{\varphi})^2 + \frac{1}{r^2} [\hat{J}_a \hat{\varphi}][\hat{J}_a \hat{\varphi}] - g \hat{\varphi}^2 (\lambda - \frac{2}{3} \hat{\varphi}) \right). \tag{3}$$

(a) Получить действие теории в коммутативном пределе: $n \to \infty$ при фиксированном r.

(b) Получить действие теории в плоском пределе: $n \to \infty$, $r^2 = \frac{n\theta}{2} \to \infty$, при фиксированном θ.

(c) Предположить, что потенциальный член в действии 3 доминирует над кинетическим и найти независящие от времени решения (солитоны) при произвольном n.