

1. Расширяющаяся Вселенная

Задача 1.1. Космологическая модель Казнера.

Рассмотрим однородное, но анизотропное решение уравнений Эйнштейна в пренебрежении материей (космологическое решение Казнера, Ландау-Лифшиц, т.2, параграф 117)

$$ds^2 = dt^2 - \sum_{i=1}^3 t^{2p_i} (dx^i)^2, \quad \sum p_i = 1, \quad \sum p_i^2 = 1.$$

- 1) Имеется ли в этом решении сингулярность тензора кривизны при каком-либо t ?
- 2) Двигаются ли сопутствующие наблюдатели по геодезическим?
- 3) Для полученного решения найти аналог закона Хаббла (линейная зависимость красного смещения z от расстояния при небольших z в однородной изотропной Вселенной).
- 4) Предположим, что в некоторый момент t_0 в такой Вселенной произошло излучение фотонов с тепловым спектром с одинаковой во всем пространстве температурой (ситуация, аналогичная рекомбинации в однородной изотропной Вселенной). Будет ли распределение фотонов, приходящих в момент $t_1 > t_0$ к сопутствующему наблюдателю с фиксированного направления, иметь тепловой спектр? Если да, то как будет зависеть температура от направления?

Задача 1.2.

Рассмотрим однородную, но анизотропную Вселенную с метрикой типа Казнера,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \sum_{i=1}^3 e^{2\beta_i(t)} (dx^i)^2,$$

где на функции β_i наложено условие

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i(t) = 0,$$

так что $a(t)$ характеризует сопутствующий объем, $a^3(t) = \det^{1/2}(-g_{ij})$. Пусть такая Вселенная заполнена пылью (веществом с нулевым давлением).

- 1) Найти закон эволюции $a(t)$, $\beta_i(t)$.
- 2) Показать, что при расширении Вселенная изотропизуется, и, более того, эффекты анизотропии исчезают в пределе $t \rightarrow \infty$.

Задача 1.3. Big Rip.

Пусть Вселенная заполнена веществом (атомами) и темной энергией, причем темная энергия имеет уравнение состояния $p = w\rho$, где константа $w < -1$. Показать, что концом расширения в этом случае является сингулярность. Описать, что происходит

с веществом при приближении к этой сингулярности. Через сколько лет наступит эта сингулярность в нашей Вселенной, если $w = -1.1$?

Задача 1.4. Газ Чаплыгина.

Рассмотреть Вселенную, заполненную веществом с уравнением состояния

$$p = -\frac{A}{\rho} \quad (1)$$

(газ Чаплыгина).

- 1) Найти зависимость параметра Хаббла от масштабного фактора.
- 2) Найти закон эволюции Вселенной $a = a(t)$ в пределах малого и большого масштабного фактора во всех трёх случаях: $\varkappa = 0, \pm 1$.
- 3) Найти закон эволюции $a = a(t)$ в случае пространственно-плоской Вселенной.
- 4) Для каких \varkappa существуют статические решения уравнений Эйнштейна?
- 5) Что можно сказать про будущее Вселенной, если известно, что в некоторый момент времени она расширяется с ускорением? Рассмотреть все три случая, $\varkappa = 0, \pm 1$.

Задача 1.5.

Найти закон эволюции $a = a(t)$ пространственно-плоской Вселенной ($\varkappa = 0$) с отрицательной, не зависящей от времени космологической постоянной. Считать, что вещество во Вселенной имеет пылевидное уравнение состояния $p = 0$. Найти полное время жизни.

Задача 1.6.

Пусть L — абсолютная светимость источника (энергия, излучаемая в единицу времени), J — его видимая яркость (поток энергии на Земле). Определим фотометрическое расстояние $r_{ph}(z)$ источника с красным смещением z равенством

$$J = \frac{L}{4\pi r_{ph}(z)^2}.$$

Найти первую поправку по z к закону Хаббла, т.е. фотометрическое расстояние $r_{ph}(z)$ с квадратичной точностью по z , в терминах H_0 и $q_0 = \ddot{a}_0/H_0^2 a_0$; уравнение Фридмана при этом не использовать.

Задача 1.7.

Найти уравнение движения частицы в расширяющейся пространственно-плоской Вселенной, считая, что эта частица находится вблизи покоящегося уединенного точечного тела массы M (далекая звезда около галактики), и с точностью до присутствия этого тела Вселенная однородна и изотропна. Записать это уравнение в терминах физического расстояния до тела и физической скорости обращения вокруг тела. Использовать

ньютоновское приближение для взаимодействия частицы с телом. Параметр Хаббла и его эволюцию считать известными.

Рассмотреть случай Вселенной, заполненной нерелятивистским веществом (плюс тело массы M), и частицы, обращающейся вокруг тела по (почти) круговой орбите с периодом обращения, малым по сравнению с хаббловским временем.

1) Больше или меньше скорость вращения при данном радиусе обращения по сравнению со случаем плоского объемлющего пространства-времени?

2) Как меняется со временем радиус обращения?

Объяснить полученные результаты.

Задача 1.8.

Найти уравнение движения частицы в расширяющейся пространственно-плоской Вселенной, считая, что эта частица находится вблизи покоящегося уединенного точечного тела массы M (далекая звезда около галактики), и с точностью до присутствия этого тела Вселенная однородна и изотропна. Записать это уравнение в терминах физического расстояния до тела и физической скорости обращения вокруг тела. Использовать ньютоновское приближение для взаимодействия частицы с телом. Параметр Хаббла и его эволюцию считать известными.

Рассмотреть случай Вселенной, доминированной космологической постоянной (плюс тело массы M), и частицы, обращающейся вокруг тела по (почти) круговой орбите. Найти максимальный радиус орбиты. Сделать оценку для $\rho_\Lambda = \Omega_\Lambda \rho_c \sim 3 \cdot 10^{-6}$ ГэВ и $M = 10^{11} M_\odot$ (масса галактики).

Задача 1.9.

Пусть в природе имеется ΔN_ν новых типов безмассовых нейтрино, свойства которых во Вселенной при температурах ниже 1 МэВ такие же, как свойства известных нейтрино¹. Считая все другие космологические параметры фиксированными, выяснить, зависит ли от ΔN_ν угловой размер горизонта эпохи рекомбинации. Если зависит, то оценить, какое ограничение на ΔN_ν можно поставить, измеряя этот угловой размер с точностью $\Delta\theta/\theta$. Считать $\Delta\theta/\theta \ll 1$, а ΔN_ν не обязательно целым. Сделать численную оценку для $\Delta\theta/\theta = 3\%$ и $\Delta\theta/\theta = 1\%$.

Космология и физика частиц

Задача 2.1.

¹Из ускорительных экспериментов (в частности, из измерения ширины Z -бозона) следует, что новые нейтрино должны быть “стерильными”, то есть не должны участвовать в слабых взаимодействиях. Тем не менее они могут иметь ту же эффективную температуру, что известные (“активные”) нейтрино благодаря осцилляциям между активными и стерильными нейтрино.

Рассмотрим нереалистическую теорию, в которой нейтрино не осциллируют, тау-нейтрино имеет массу и может распадаться по единственному каналу $\nu_\tau \rightarrow \nu_e \nu_\mu \bar{\nu}_\mu$, а массы ν_e и ν_μ равны нулю. Найти космологически запрещенную область параметров $(m_{\nu_\tau}, \tau_{\nu_\tau})$, где m_{ν_τ} и τ_{ν_τ} — масса и время жизни ν_τ .

Задача 2.2.

Рассмотрим тяжелые ($M_X > 1$ ТэВ) гипотетические стабильные частицы X , рождающиеся парно в процессе аннигиляции топ-кварков, $t\bar{t} \rightarrow X\bar{X}$. Пусть сечение их образования имеет вид

$$\sigma_{t\bar{t} \rightarrow X\bar{X}} = \frac{h^2}{64\pi^2} \frac{1}{s}, \quad s > 4M_X^2, \quad (2)$$

а ниже порога образования пары X, \bar{X}

$$\sigma_{t\bar{t} \rightarrow X\bar{X}} = 0, \quad s < 4M_X^2,$$

где \sqrt{s} — энергия $t\bar{t}$ -пары в системе центра масс, h — некоторая константа связи (пороговый фактор в (2) мы не выписывали, считая его несущественным для оценки). Пусть сечение обратного процесса $X\bar{X} \rightarrow t\bar{t}$ также имеет вид (2), где \sqrt{s} теперь — полная энергия (включая энергию покоя) пары $X\bar{X}$ в системе центра масс.

1) Считая, что “в начале” (т.е., при $T \gg M_X$) частицы X и \bar{X} отсутствовали в космической плазме, найти область на плоскости (M_X, h) , для которой процессы $t\bar{t} \rightarrow X\bar{X}$ и $X\bar{X} \rightarrow t\bar{t}$ находятся в термодинамическом равновесии когда-нибудь в течение эволюции Вселенной (т.е. при каких-нибудь температурах).

2) При том же начальном условии найти космологически разрешенную область на плоскости параметров (M_X, h) . Содержит ли она линию $h = 0$?

3) При каких значениях M_X и h частицы X и \bar{X} представляют из себя темную материю (т.е., $\Omega_X \simeq 0.2$)? Начальные условия считать такими же, как и в п.1.

Задача 2.3.

Сделаем (неправильное) предположение о том, что в природе отсутствуют Z^0 -бозоны, а W^\pm — существуют. Какими тогда будут современные концентрации нейтрино различных типов?

Указание:

- 1) процессы, происходящие на петлевом уровне, не учитывать;
- 2) предполагать (снова вопреки экспериментальным данным), что нейтринные осцилляции отсутствуют.

Задача 2.4.

Предложить модель физики частиц (расширяющую Стандартную модель), в которой реликтовые нейтрино в эпоху рекомбинации имели бы температуру T_ν меньше $0.1 T_\gamma$,

где T_γ — температура фотонов в эту эпоху. Какого минимального значения T_ν/T_γ можно добиться? Указание: 1) разрешается вводить любые гипотетические частицы, делать произвольные предположения об их массе, масштабе сечения их взаимодействий, времени жизни и модах распада. Требуется только, чтобы модель не противоречила экспериментальным данным, полученным на ускорителях, т.е. массы новых частиц превышали 200 ГэВ; 2) космологические данные по первичному нуклеосинтезу не учитывать, но в остальном модель не должна противоречить космологии.

Задача 2.5.

Найти температуру рекомбинации электронов и ядер ${}^4\text{He}$, считая, что имеет место термодинамическое равновесие. Указания: (1) массовая доля первичного ${}^4\text{He}$ составляет 25%, то есть

$$\frac{m_{{}^4\text{He}}n_{{}^4\text{He}}}{m_p n_p + m_{{}^4\text{He}}n_{{}^4\text{He}}} = 0.25 ;$$

(2) не забудьте, что атом гелия имеет два электрона.

Задача 2.6.

Найти разности плотностей частиц и античастиц (асимметрии) для всех типов ультра-релятивистских частиц в равновесной электронейтральной среде при температуре $T = 800$ МэВ, считая известными плотности барионного и лептонных чисел $n_B, n_{L_e}, n_{L_\mu}, n_{L_\tau}$, причём $n_B, n_{L_e}, n_{L_\mu}, n_{L_\tau} \ll T^3$. Указания: (1) учесть, что при такой температуре релятивистскими являются u -, d -, s -кварки, электрон, мюон и все типы нейтрино, а остальные фермионы Стандартной модели — нерелятивистские; (2) учесть, что нейтрино имеют одну спиральность, а другие фермионы — две; (3) учесть, что кварки имеют три цветовых состояния.

Задача 2.7.

Оценить численные значения химических потенциалов μ_e, μ_p (точнее, разностей $(\mu_p - m_p), (\mu_e - m_e)$), непосредственно перед рекомбинацией ($z = 1100$). Сравнить полученные значения с массами электрона и протона. То же для температуры закалки нейтрино $T \sim 1$ МэВ.

Задача 2.8.

Проверьте, что нейтрино с массой $m_\nu = 3$ ГэВ закаливается в нерелятивистском режиме, $T_d < m_\nu$. Найдите массу нейтрино, при которой это предположение перестает выполняться. Покажите, тем не менее, что космологически исключена вся область масс стабильных нейтрино

$$20 \text{ эВ} \lesssim m_\nu \lesssim 3 \text{ ГэВ}$$

Задача 2.9

Пусть имеются новые гипотетические частицы X и их античастицы \bar{X} массы m , единственными механизмами уничтожения и рождения которых служит их парная аннигиляция в частицы Стандартной модели и обратный процесс. Пусть в нерелятивистском пределе сечение аннигиляции равно

$$\sigma(X\bar{X}) = \frac{\sigma_0}{v_X},$$

где v_X — относительная скорость X и \bar{X} , σ_0 — константа (s -волновая аннигиляция). Пусть изначально во Вселенной имелась асимметрия

$$\frac{n_X - n_{\bar{X}}}{s} \equiv \Delta_X > 0.$$

При каких значениях параметров m , σ_0 и Δ_X частиц X и античастиц \bar{X} сегодня почти одинаковое количество, а при каких имеются только частицы X , а античастиц \bar{X} почти не осталось?