

# Задачи теоретического минимума

## 1 Квантование свободных полей

1. Рассмотрим теорию двух действительных скалярных полей  $\varphi$  и  $\chi$ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - m\mu\varphi\chi - \frac{M^2}{2}\chi^2 + \frac{c}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\mu\chi.$$

Проквантовать. При каких значениях  $m$ ,  $\mu$ ,  $M$  и  $c$  такая теория имеет смысл?

2. Дано двухкомпонентное фермионное поле  $\xi_\alpha$  с лагранжианом

$$\mathcal{L} = i\bar{\xi}_\alpha\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\partial_\mu\xi_\alpha - \frac{m}{2}(\xi^\alpha\xi_\alpha + \text{h.c.}).$$

где использованы обозначения книги Весса, Беггера.

- Показать, что лагранжиан лоренц-инвариантен.
- Найти общее решение уравнений поля.
- Получить выражение для тензора энергии-импульса.
- Проквантовать это поле: найти коммутационные соотношения между операторами рождения и уничтожения, а также между операторами поля; найти пропагатор.

## 2 Простейшие процессы

1. Вычислить дифференциальное сечение  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  в КЭД в низшем порядке теории возмущений.
2. Найти асимметрию вперед-назад в комптоновском рассеянии неполяризованных фотонов и неполяризованных электронов в системе центра масс:

$$\frac{\sigma(\text{вперед}) - \sigma(\text{назад})}{\sigma_{\text{total}}}.$$

3. Вычислить время жизни мюона в теории Ферми в низшем порядке по  $G_F$ . Сравнить с экспериментом.

### 3 Функции Грина. Оптическая теорема

1. Проиллюстрировать представление Челлена–Лемана для скалярного пропагатора явным вычислением в низшем порядке теории возмущений в теории Юкавы с лагранжианом взаимодействия  $\mathcal{L}_Y = g\bar{\psi}\psi\phi$ .
2. Найти связь между весовой функцией представления Челлена–Лемана для скалярного пропагатора и матричными элементами оператора скалярного поля. Проиллюстрировать эту связь в модели задачи 1.
3. Рассматривая четырехточечную функцию Грина в теории  $\lambda\phi^4$  в порядке  $\lambda^2$  и используя оптическую теорему, найти сечение рассеяния  $2 \rightarrow 2$  в порядке  $\lambda^2$ . Сравнить с вычислением на основе амплитуды  $2 \rightarrow 2$  в порядке  $\lambda$ .
4. Найти связь между полным сечением аннигиляции  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  и вкладом мюонов в поляризационный оператор фотона в низшем неисчезающем порядке теории возмущений. Продемонстрировать явным вычислением, что эта связь выполняется.
5. В низшем порядке по  $e^2$  и во *всех* порядках по сильному взаимодействию найти связь между адронным вкладом в поляризационный оператор фотона и сечением аннигиляции  $e^+e^- \rightarrow$  адроны.
6. Показать явным вычислением в теории  $\lambda\phi^4$ , что производящий функционал для функций Грина  $Z[J]$  связан с производящим функционалом для связных функций Грина  $W[J]$  соотношением  $Z = e^W$ . Рассмотреть теорию возмущений до  $\lambda^3$ .
7. Рассматривая аналог представления Челлена–Лемана, доказать теорему Голдстоуна. [*Теорема.* Пусть  $Q$  — сохраняющийся глобальный заряд. Пусть также

$$\langle 0|\Phi|0\rangle \neq 0, \quad \text{где} \quad \Phi = [Q, O],$$

$O$  — некоторый оператор. Тогда существует безмассовое бозонное состояние  $|\mathbf{k}\rangle$ , такое что

$$\langle 0|j_\mu|\mathbf{k}\rangle \propto k_\mu,$$

где  $j_\mu$  — сохраняющийся ток ( $Q = \int j_0 d^3x$ ), а коэффициент пропорциональности определяется вакуумным средним  $\langle 0|\Phi|0\rangle$ .]

8. Используя формализм ЛСЦ, найти связь между классическими решениями уравнений поля и древесными амплитудами в скалярных теориях.

## 4 Метод функционального интеграла

1. Найти энергию основного состояния гармонического осциллятора, вычисляя функциональный интеграл

$$e^{-E_0 T} = \langle 0 | e^{-\hat{H} T} | 0 \rangle = \int e^{-S} Dx = (?) e^{-\frac{1}{2} \omega T} .$$

2. Даны два действительных скалярных поля  $\varphi$ ,  $\chi$  с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{1}{2} \chi^2 + g \varphi^2 \chi .$$

Построить диаграммную технику по взаимодействию  $g$ . Показать поддиаграммно, что модель эквивалентна теории одного скалярного поля с простым локальным самодействием. Найти лагранжиан эквивалентной теории. Показать, что функциональные интегралы для функций Грина совпадают в двух теориях.

3. Дать альтернативный вывод представления ЛСЦ с помощью функционального интеграла. *Указание:* использовать функциональный интеграл для амплитуд в представлении когерентных состояний (голоморфном представлении).

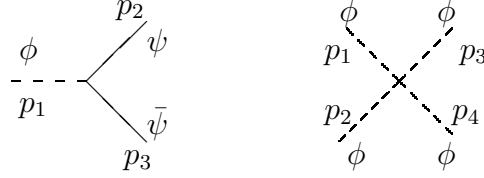
## 5 Квантование калибровочных полей

1. Вычислить энергию взаимодействия (аналог кулоновского потенциала) “кварк-кварк” и “кварк-антикварк” в КХД ( $SU(3)$  с кварками в фундаментальном представлении) в низшем порядке теории возмущений для тяжелых кварков.
2. Вычислить сечение рассеяния глюона на глюоне в низшем порядке теории возмущений, усредненное по спину и цвету. Зависит ли оно от калибровки (параметра  $\alpha$ )?
3. Проверить первое нетривиальное тождество Славнова-Тейлора в однопетлевом приближении для расходящихся частей при калибровочно-инвариантной регуляризации в КХД.

## 6 Перенормировки и ренормгруппа

1. Найти все контрчлены в четырехмерной теории  $\phi^3$  в однопетлевом приближении. Контрчлены для пропагаторных диаграмм найти в двухпетлевом приближении.
2. Доказать перенормируемость теории  $\phi^6$  в  $D = 3$ .
3. Перенормируема ли теория  $h\phi\bar{\psi}\psi + \lambda\phi^4$ ? Рассмотреть случаи массивного и безмассового фермионного поля.

4. Вычислить  $\beta$ -функции и аномальные размерности полей в КЭД и КХД с  $N_c$  цветами и  $N_f$  кварками.
5. Вычислить аномальную размерность оператора  $\bar{\psi}\psi$  в теории Юкавы.
6. Найти поведение вершинных функций



в теории Юкавы при евклидовых  $p_1 \sim p_2 \sim p_3 \sim p_4 \sim Q$ , где  $Q^2$  велико.

7. Что такое  $\Lambda_{QCD}$ ?

## 7 Сильные взаимодействия

1. Для состояний мезонов с орбитальным моментом 0, барионов ( $s = 1/2$ ,  $s = 3/2$ ) найти связь между спином, четностью и представлением  $SU(3)$ , в котором они находятся.
2. Из закона сохранения изоспина найти связь между амплитудами  $\pi\pi$  рассеяния:  $\pi^0\pi^0$ ,  $\pi^+\pi^-$ ,  $\pi^-\pi^-$ ,  $\pi^+\pi^+$ ,  $\pi^0\pi^+$ ,  $\pi^0\pi^-$ . То же для  $\pi N$ - и  $N\bar{N}$ -рассеяния.
3. Оценить численное значение кваркового конденсата  $\langle 0|\bar{u}u|0\rangle$ , считая  $SU_f(3)$ -симметрию точной для конденсатов, то есть  $\langle\bar{u}u\rangle = \langle\bar{d}d\rangle = \langle\bar{s}s\rangle$ .
4. Вычислить ширину  $\pi^+$ , считая известным  $f_\pi$ . Сравнить с экспериментом.
5. Рассмотрим нелинейную  $O(3)$   $\sigma$ -модель:

$$\mathcal{L} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr} [\partial_\mu U^\dagger \cdot \partial_\mu U],$$

где

$$U = e^{i\tau^a \pi^a / f_\pi} \in SU(2).$$

Показать, что в этой модели выполняются гипотезы о сохранении векторных и аксиальных токов. Показать, что выполняются теоремы о мягких пионах (те, что описаны в книге Ченга, Ли). Показать, что лагранжиан  $\sigma$ -модели однозначно фиксируется условиями сохранения векторного и аксиального тока в низшем порядке по импульсам пиона. Ввести слагаемые в лагранжиан, нарушающие аксиальный ток, но сохраняющие векторный. Показать, что выполняются соотношения PCAC (все на древесном уровне).

## 8 Электрослабая теория

1. Вычислить парциальные ширины распада  $Z^0 \rightarrow u\bar{u}, d\bar{d}, l^+l^-, \nu\bar{\nu}$  и полную ширину  $Z_0$ . Сравнить с экспериментом.
2. Выяснить, в каком порядке по  $G_F$  появляются  $FCNC$  – нейтральные токи с несохранением аромата. Где они могли бы проявиться экспериментально? Оценить величину эффекта.
3. Вычислить ширину  $t$ -кварка.
4. Вычислить сечение  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  при энергиях  $50 \div 150$  ГэВ.
5. Найти наиболее вероятный канал распада  $H$  для всех масс  $m_H$  в Стандартной модели.

## 9 Глубоконеупругое рассеяние

1. Вычислить дифференциальное сечение для процесса глубоконеупругого рассеяния нейтрино на нуклоне  $\nu N \rightarrow \nu X$ .
2. Найти дифференциальное сечение процесса  $eN \rightarrow eX$ . Оценить полное сечение рассеяния электрона на нейтроне при  $E_e = 800$  ГэВ. (Нуклон покоится).
3. Найти партонное выражение (“скейлинг”) для рождения тяжелого кварка  $b$ :  $m_b \gg \Lambda_{\text{QCD}}$ . Найти полное сечение рождения  $b$ -кварка при энергии  $E_\nu = 15$  ГэВ,  $E_e = 200$  ГэВ. (Нуклон покоится).