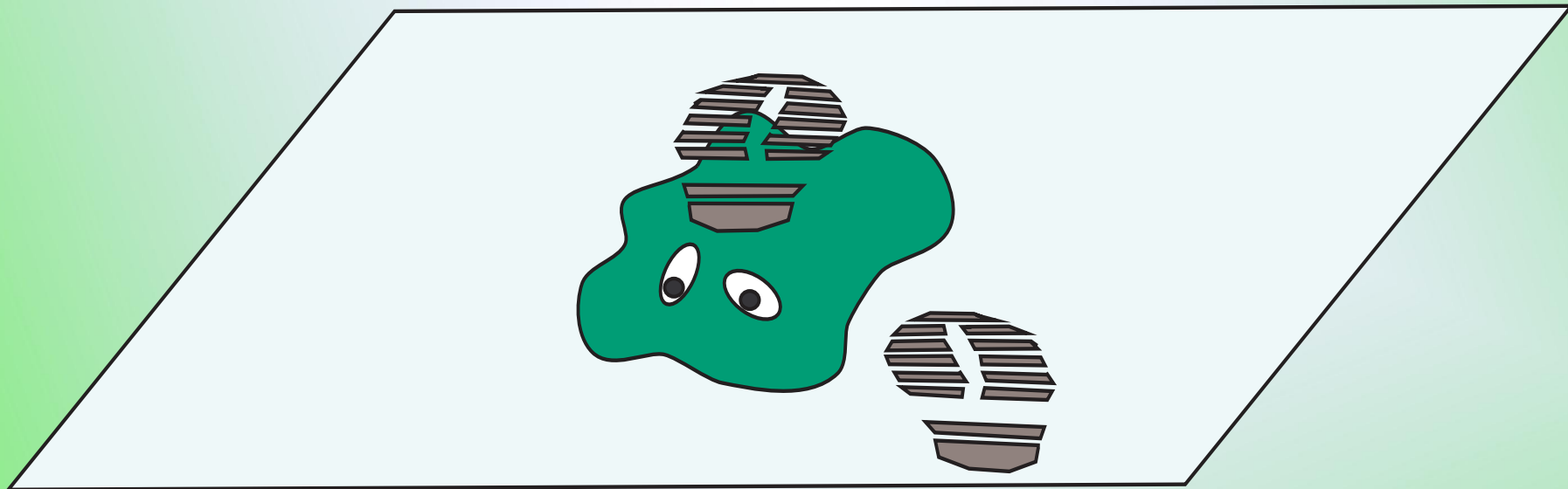


Многомерные миры

Максим Либанов

Институт ядерных исследований РАН

кафедра физики частиц и космологии физического ф-та МГУ



физфак МГУ, 13 октября 2009 г.

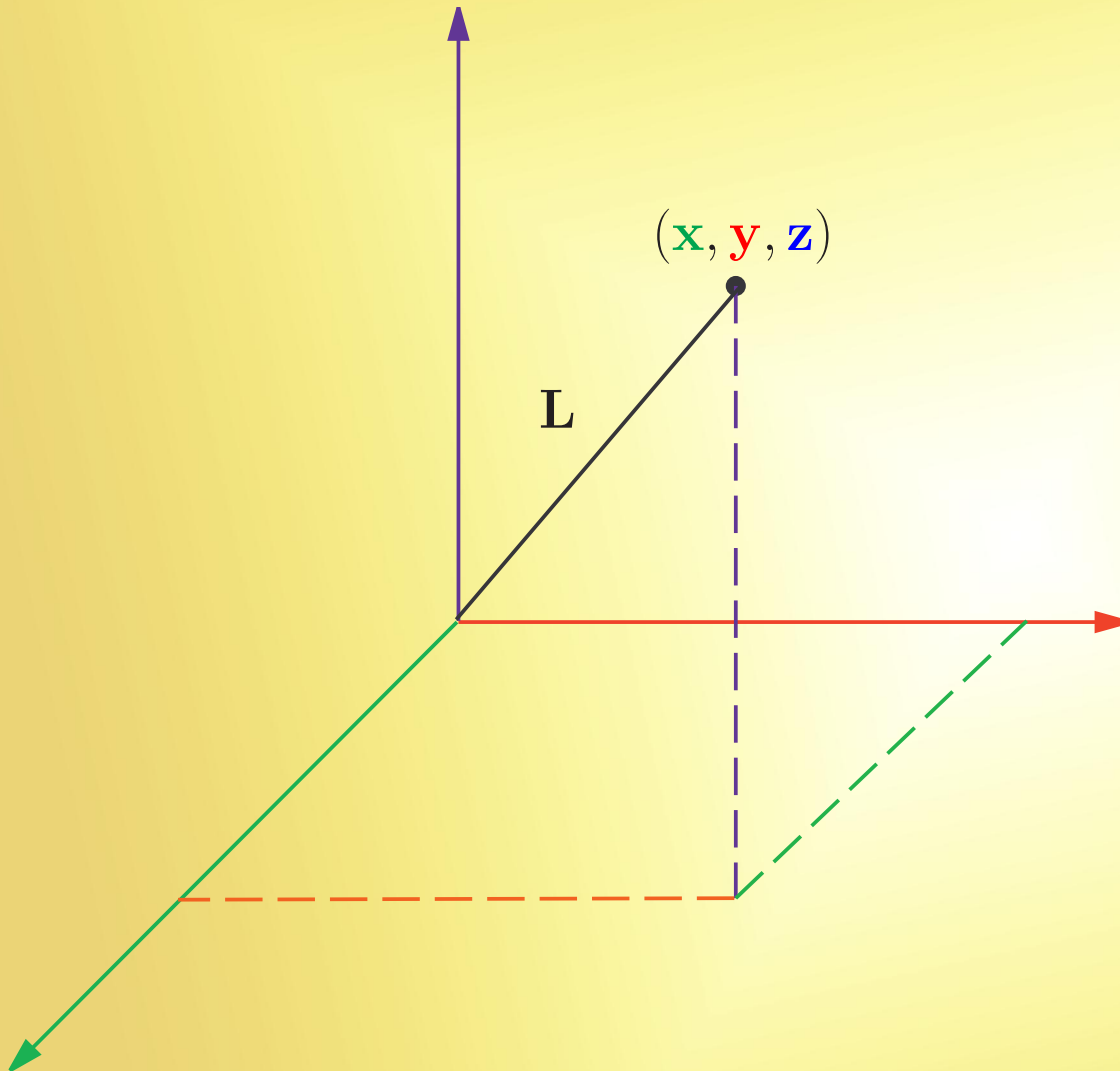
Что такое размерность?
Почему наш мир трёхмерный?

Что такое размерность? Почему наш мир трёхмерный?

Евклид (300 до н.э.):

- *Точка - это то, что не имеет частей.*
- *Линия - длина, лишённая ширины.*
- *Плоскость - это то, что имеет только длину и ширину.*
- *Объём - это то, что имеет длину, ширину и глубину.*

Трёхмерное пространство



- Три числа необходимы для задания положения точки
- Три перпендикулярные прямые проходят через одну точку
- Расстояние

$$L^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

- Можно обобщить на пространство произвольной размерности

 Такое построение некорректно!!! 

Кантор (конец XIX века):

Число точек на плоскости равно числу точек на прямой!

Задача: Построить *взаимоднозначное* соответствие между точками прямой и плоскости

Брауэр, Лебег и др. (рубеж XIX и XX веков):

Строгое определение размерности, основанное на теории множеств

? Почему три ?

● $\exists \infty$ число правильных многоугольников, но 5 многогранников
 \implies число измерений < 4 (Птолемей и др.)

● Закон Ньютона (Кулона) в d -измерениях

$$\vec{F} \sim \frac{1}{r^{d-1}}$$

При $d > 3$ не существует ни стационарных орбит планет, ни устойчивых состояний электронов в атомах (Эренфест 1917 г.)

● При $d = 1$ – невозможны безстолкновительные процессы

● d – четное:

● Нет киральности – вероятно отсутствует CP -нарушение

● Реверберации (эхо) – за чётко сформированным сигналом обязательно следуют возмущения – невозможно передавать информацию (Уитроу 1955 г.)

“паразитные” возмущения
отсутствует задний фронт



Круги на воде

? Почему же НЕ три ?

- СТО – четырёхмерное пространство-время (1905 г.)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$$

- ОТО – гравитация \equiv искривленное пространство (1915 г.)

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(\mathbf{x}) dx^\mu dx^\nu$$

- Калуца 1921 г.: попытался объяснить ЭМ на геометрическом языке и ввёл дополнительное (четвёртое) пространственное измерение

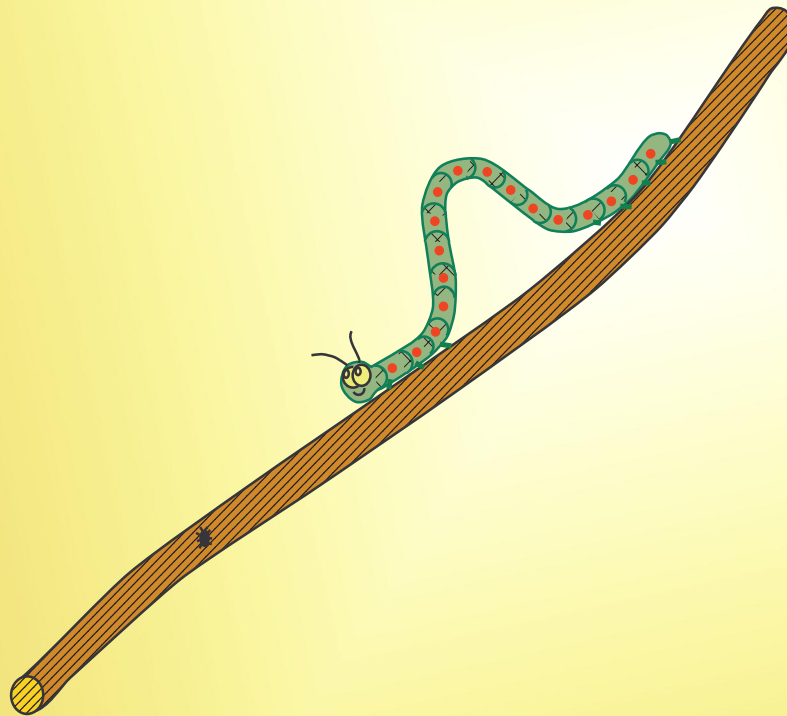
$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & A_\mu \\ A_\nu & \phi \end{pmatrix}$$

A_μ – электромагнитное поле!!!

- 🕒 70-ые годы: описание всех взаимодействий на геометрическом языке в рамках ТВО требует 11 измерений
- 🕒 70-ые годы: для супергравитации наиболее подходящи 11 измерений
- 🕒 80-ые годы: теория суперструн – наиболее непротиворечивый подход к квантовой гравитации – требует 10 измерений
- 🕒 90-ые годы: *M*-теории требуют 11 измерений

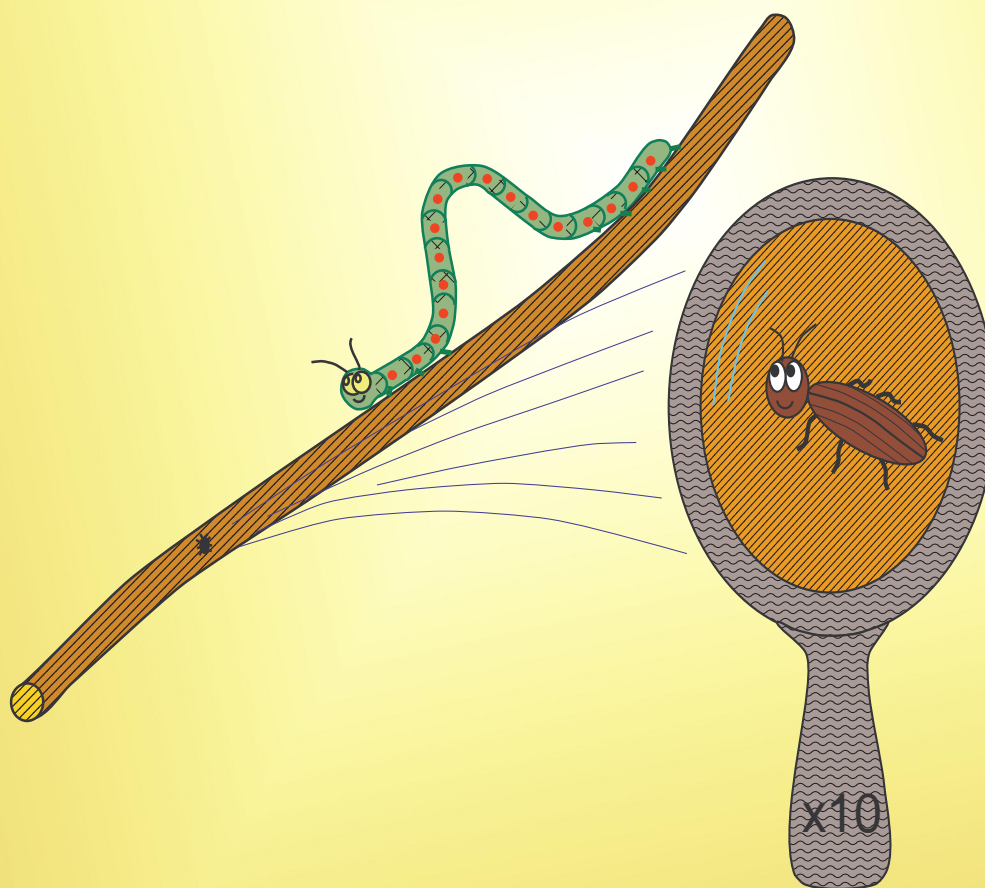
Почему дополнительные измерения невидимы?

- Они компактны и малы (Клейн 1926 г.)



Почему дополнительные измерения невидимы?

- Они компактны и малы (Клейн 1926 г.)



• ... и каков характерный размер?

Должен определяться гравитационным взаимодействием. В естественной системе единиц

$$\hbar = c = 1 \Rightarrow 1 \text{ГэВ} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-14} \text{см}}$$

константа гравитационного взаимодействия

$$G_N = 6.67 \times 10^{-11} \text{м}^3 \text{кг}^{-1} \text{с}^{-2} = 6.7 \times 10^{-39} \frac{1}{\text{ГэВ}^2}$$

является единственным размерным параметром и определяет масштабы энергий (масс) и длин (времен):

$$M_{\text{PL}} = \frac{1}{\sqrt{G_N}} = 1.2 \times 10^{19} \text{ГэВ} = 2.1 \times 10^{-5} \text{г}$$

$$L_{\text{PL}} = \frac{1}{M_{\text{PL}}} = 1.7 \times 10^{-33} \text{см} = 5.5 \times 10^{-44} \text{с}$$

Размер дополнительных измерений очень мал:

$$L_{PL} \simeq 10^{-33} \text{ см!}$$

На сегодняшний день мы достигли масштабов порядка



$$T \text{эВ}^{-1} \simeq 10^{-17} \text{ см} \simeq 10^{16} L_{PL}$$



Чтобы достичь планковских энергий требуется линейный ускоритель размером с нашу Галактику!

Почему же все-таки три?

- Если число измерений 11, то редукция до четырёх измерений осуществляется за счёт компактификации на семимерной сфере.
Сфера S_7 обладает дополнительными симметриями.
- Антропный принцип: можно предположить, что во Вселенной существуют домены с разными способами компактификации, а следовательно, с различным числом измерений и с различной физикой. В доменах с $d \neq 3$ жизнь по всей видимости невозможна.

Можно ли обойти полученное ограничение на размер дополнительных измерений?

Можно ли обойти полученное ограничение на размер дополнительных измерений?



Да!



• Гравитационная постоянная определяется из закона Ньютона

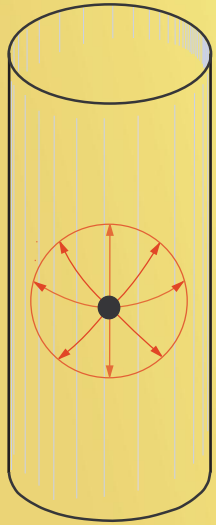
$$\vec{F}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{M_{\text{PL}}^2} \frac{\vec{r} m_1 m_2}{r^2} = -m_2 \vec{\nabla} V(\mathbf{r})$$

$$\Delta V = \frac{4\pi}{M_{\text{PL}}^2} m_1 \delta(\vec{r})$$

$$m_2 \int d^3r \Delta V = - \oint d\vec{s} \vec{F} = \frac{4\pi}{M_{\text{PL}}^2} m_1 m_2$$

Закон Ньютона зависит от числа измерений.

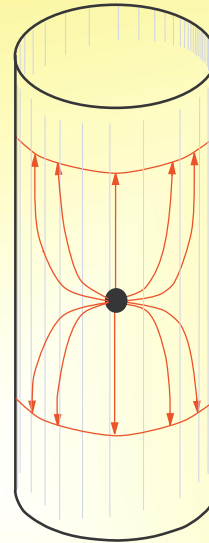
Рассмотрим случай двух пространственных измерений: одно пространственное измерение компактно, второе — нет.



При $r \ll L$

$$\oint d\vec{s}\vec{F} = 2\pi r F(r) = -\frac{2\pi}{M_{PL}^{(3)}} m_1 m_2$$

$$F(r) = -\frac{1}{M_{PL}^{(3)}} \frac{m_1 m_2}{r}$$



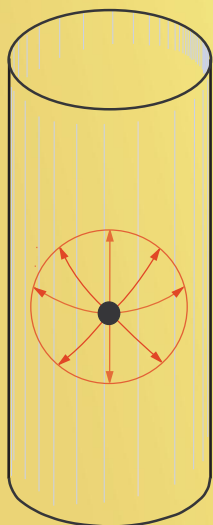
При $r \gg L$

$$\oint d\vec{s}\vec{F} = 4\pi L F(r) = -\frac{2\pi}{M_{PL}^{(3)}} m_1 m_2$$

$$F(r) = -\frac{1}{M_{PL}^{(3)}} \frac{m_1 m_2}{2L} \simeq -\frac{1}{M_{PL}^{(3)} V_{\text{Доп. изм.}}}$$

Закон Ньютона зависит от числа измерений.

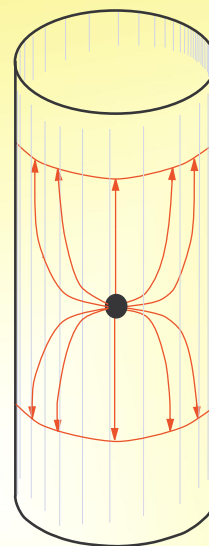
Рассмотрим случай двух пространственных измерений: одно пространственное измерение компактно, второе — нет.



При $r \ll L$

$$\oint d\vec{s}\vec{F} = 2\pi r F(r) = -\frac{2\pi}{M_{PL}^{(3)}} m_1 m_2$$

$$F(r) = -\frac{1}{M_{PL}^{(3)}} \frac{m_1 m_2}{r}$$



При $r \gg L$

$$\oint d\vec{s}\vec{F} = 4\pi L F(r) = -\frac{2\pi}{M_{PL}^{(3)}} m_1 m_2$$

$$F(r) = -\frac{1}{M_{PL}^{(3)}} \frac{m_1 m_2}{2L} \simeq -\frac{1}{M_{PL}^{(3)} V_{\text{Доп. изм.}}}$$

В общем случае d измерений получаем

$$F(r) = -\frac{1}{(M_{PL}^{(d)})^{d-2}} \frac{m_1 m_2}{r^{d-2}} \text{ при } r \ll L$$

$$F(r) = -\frac{1}{[(M_{PL}^{(d)})^{d-2} V_{d-4}]} \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ при } r \gg L$$

Эффективная масса Планка

- Эффективная четырёхмерная масса Планка равна

$$M_{\text{PL}}^2 = (M_{\text{PL}}^{(d)})^{d-2} V_{d-4}$$

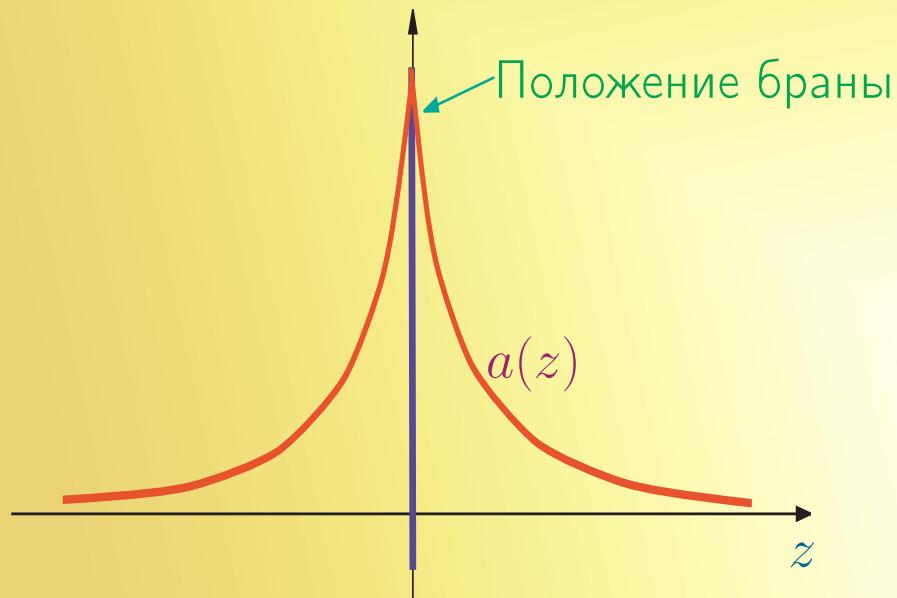
Рассмотрим частные случаи. Пусть $M_{\text{PL}}^{(d)} = 1 \text{ ТэВ}$ — позволяет переформулировать проблему калибровочной иерархии,

d	L
5	$10^{15} \text{ см} \sim 100 \text{ а.е.}$
6	1мм
7	10^{-6} см

На сегодняшний день закон Ньютона экспериментально проверен вплоть до 0.1 мм. Таким образом, даже случай $d=6$ экспериментально ещё не закрыт!

● Бесконечно большие дополнительные измерения.

Рэндалл-Сандрам 1999 г.



Брана (тонкая доменная стенка) находится в точке $z = 0$ пятимерного пространства-времени с отрицательной космологической постоянной Λ . При определённом соотношении между Λ и натяжением браны (плотностью энергии браны) решение уравнений Эйнштейна будет

$$ds^2 = a^2(z)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dz^2$$

с масштабным фактором $a(z)$

$$a(z) = e^{-k|z|}.$$

Здесь k является комбинацией космологической постоянной и натяжения браны.

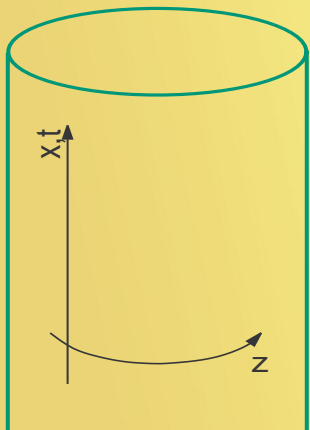
Благодаря $a(z)$ гравитация на бране является четырёхмерной!

Почему дополнительные измерения никак не проявляют себя в других взаимодействиях?

🔴 Редукция Калуцы-Клейна.

Решением уравнения Клейна-Гордона для безмассового скалярного поля с периодическими граничными условиями

$$\partial^2 \Phi(x, z) \equiv (\partial_\mu^2 - \partial_z^2) \Phi = 0, \quad \Phi(x, z) = \Phi(x, z + 2\pi L)$$



КК спектр

является

$$\Phi(x, z) = \sum_n \varphi_n^c(x) \cos\left(\frac{nz}{L}\right) + \varphi_n^s(x) \sin\left(\frac{nz}{L}\right)$$

$$\partial_\mu^2 \varphi_n^{s,c} + \frac{n^2}{L^2} \varphi_n^{s,c} = 0$$

Дополнительные измерения \Leftrightarrow бесконечный набор полей — **Калуца-Клейновская башня** — с массами $M_n = \frac{n}{L}$.

При достаточно малых L в низкоэнергетическом спектре присутствует только **нулевая мода** $\varphi_0^c(x) \dots$

• ... а что будет в случае больших дополнительных измерений?

При $L = 1\text{мм}$

$$M_1 = \frac{1}{L} = 2 \times 10^{-4} \text{эВ} ,$$

и мы обнаружили бы вплоть до энергии 100ГэВ

$$\frac{100 \text{ГэВ}}{M_1} \simeq 10^{13} \text{ новых состояний!}$$

• ... а что будет в случае больших дополнительных измерений?

При $L = 1\text{мм}$

$$M_1 = \frac{1}{L} = 2 \times 10^{-4} \text{эВ} ,$$

и мы обнаружили бы вплоть до энергии 100 ГэВ

$$\frac{100 \text{ ГэВ}}{M_1} \simeq 10^{13} \text{ новых состояний!}$$

!!! НУЖЕН ДРУГОЙ МЕХАНИЗМ !!!

Локализация на доменной стенке

Рубаков, Шапошников 1983 г.

• Кинк (доменная стенка).

Рассмотрим в пятимерном пространстве-времени скалярное поле с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{\lambda}{2}(\varphi^2 - v^2)^2$$

В этой модели существует устойчивое статическое решение уравнений движения

$$\partial_z^2 \varphi - 2\lambda\varphi(\varphi^2 - v^2) = 0$$

$$\varphi(z \rightarrow \pm\infty) = \pm v$$

*называемое **кинком** — простейшим **топологическим солитоном***

$$\varphi_k(z) = v \operatorname{th} \left(\sqrt{\lambda} v z \right)$$

Фермион в поле кинка.

Рассмотрим безмассовый фермион, взаимодействующий с полем φ . Уравнение Дирака для такого фермиона в поле кинка имеет вид

$$i\partial_t\Psi + i\gamma_0\gamma_i\partial_i\Psi = (\gamma_0\gamma_5\partial_z + g\varphi_k\gamma_0)\Psi \equiv H_z\Psi$$

Если бы $\varphi = v$, то это было бы уравнение для фермиона с массой gv . Во внешнем поле кинка фермион имеет массу gv вне стенки, и нулевую массу на стенке. Поэтому фермион притягивается к стенке.

Будем искать решение в виде

$$\Psi(x, z) = \sum_n \psi_n(z) \otimes \chi_n(x)$$

$$H_z\psi_n = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_z + g\varphi_k \\ \partial_z + g\varphi_k & 0 \end{pmatrix} \psi_n = m_n\psi_n$$

Три свойства последнего уравнения:

- ✓ Существует **одна** нулевая мода, локализованная на стенке, и она левая

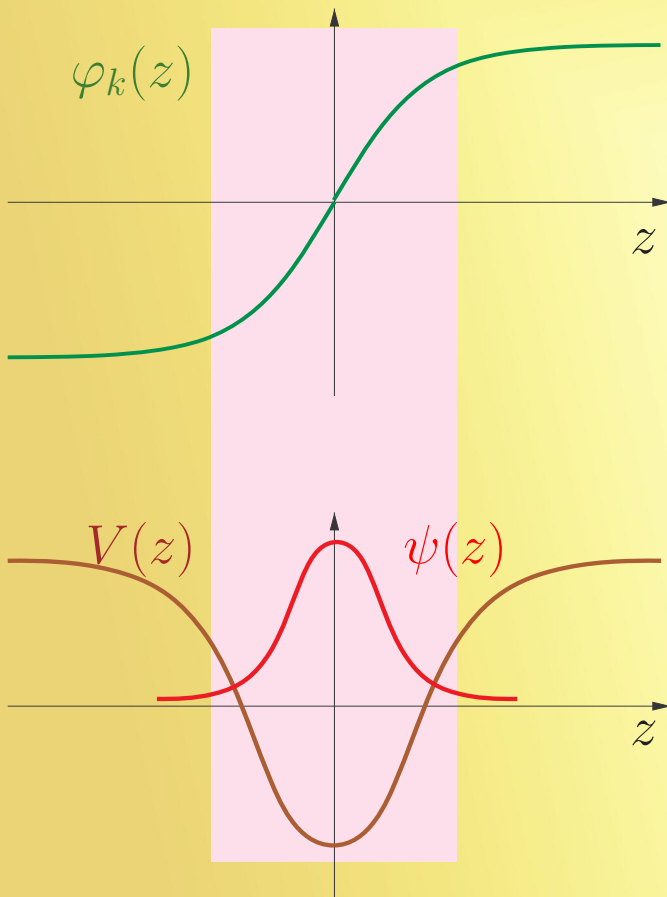
$$\psi_0 = \begin{pmatrix} \exp \left[-g \int^z \varphi_k(y) dy \right] \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1 - \gamma_5}{2} \psi_0 = 0$$

Размер локализации $(vg)^{-1}$

- ✓ Возможно существуют несколько дискретных уровней с

$$m_n \simeq gv$$



Фермионный
спектр

- ✓ При $m > gv$ спектр непрерывный – частица покидает брану.



Можно локализовать киральный
безмассовый фермион в
дополнительных измерениях!

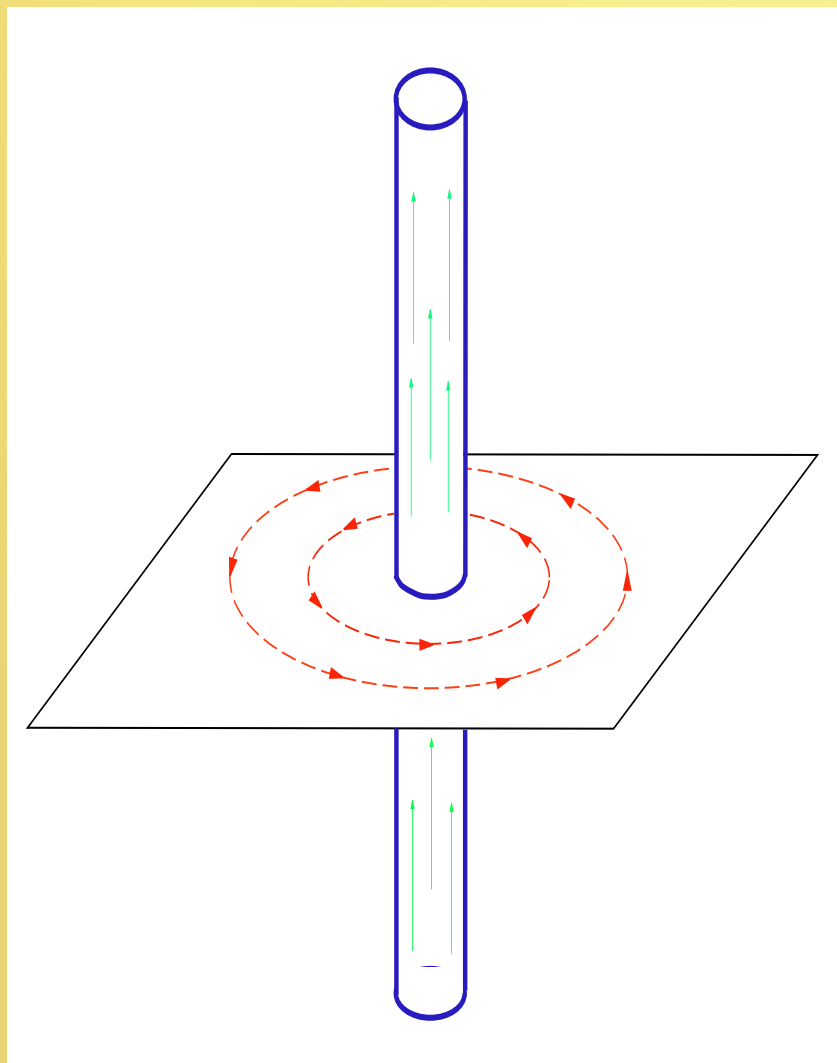
Размер локализации можно выбрать порядка

$$\frac{1}{gv} \sim \frac{1}{M_{\text{PL}}^{(5)}} \sim \frac{1}{\text{ТэВ}}$$

Частица будет покидать брану при энергиях порядка

$$M_{\text{PL}}^{(5)} \sim \text{ТэВ}$$

Происхождение трёх фермионных поколений

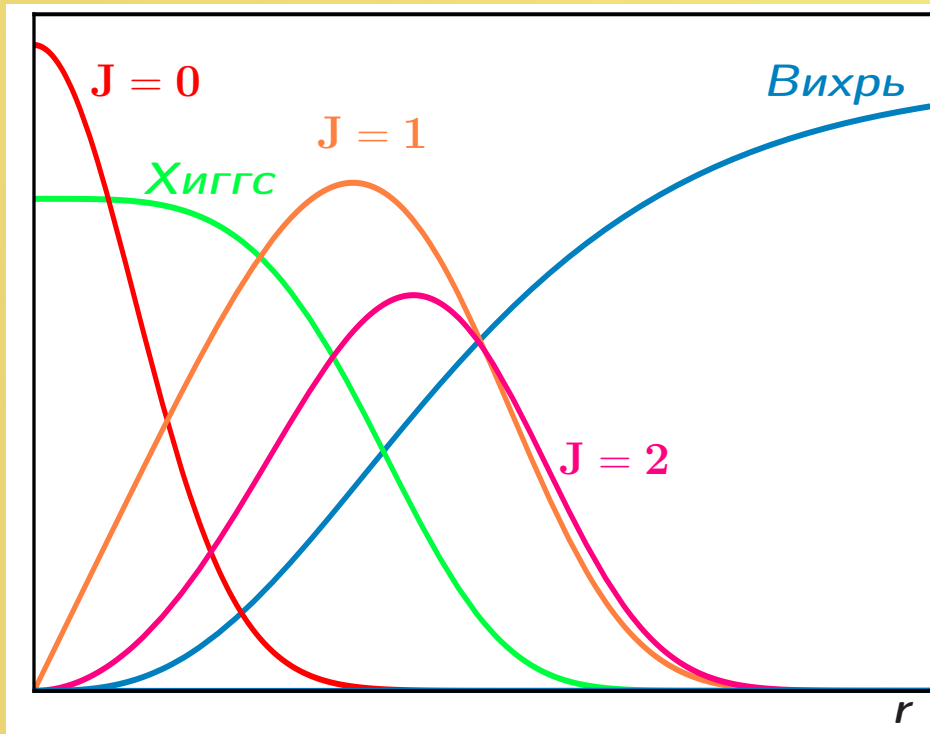


- Наше трёхмерное пространство представляет собой кор вихря Абрикосова-Нильсена-Олесена в шестимерном пространстве-времени.
- Дополнительные измерения могут быть как бесконечно большими, так и компактными. Для плоского дополнительного пространства

$$R_{\text{грав}} \lesssim 0.1 \text{ мм}$$

Размер кора вихря

$$r_{\text{в}} < (1 \text{ ТэВ})^{-1} = 2 \cdot 10^{-17} \text{ см} \ll R_{\text{грав}}$$



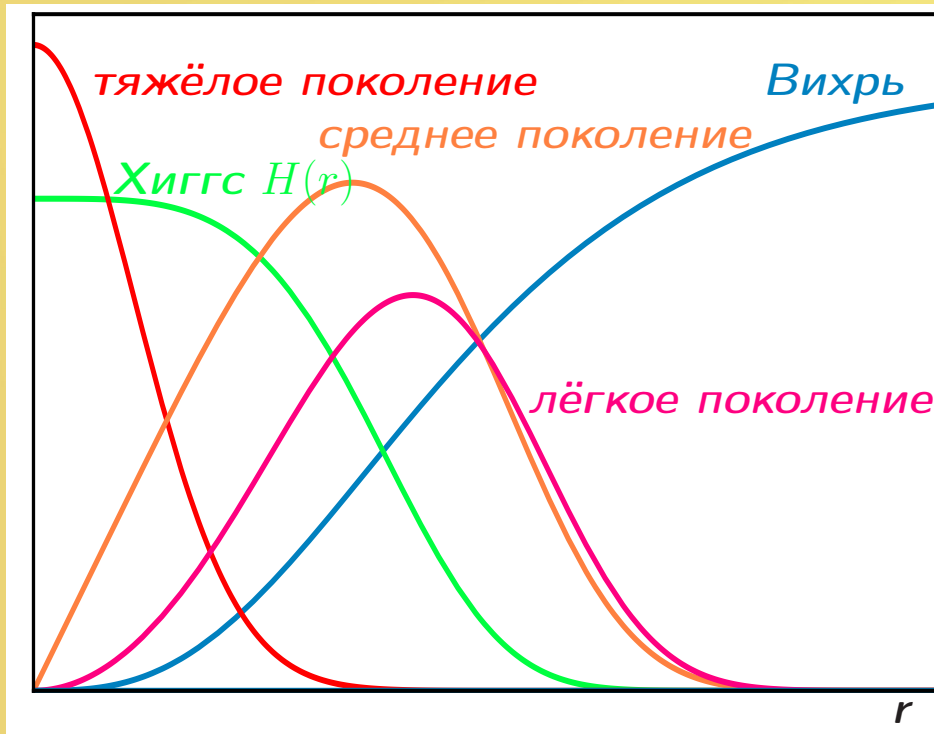
- В шестимерном пространстве существует лишь одно вектороподобное (по отношению к полям Стандартной модели) поколение фермионов.
- Благодаря специальному взаимодействию фермионов с полями вихря, три нулевые моды соответствующей киральности локализуются в центре вихря.

- Моды отличаются проекцией обобщённого углового момента

$$\mathbf{J} = -i\partial_\varphi + \frac{\sigma_{45}}{2} - \frac{3}{2}\Gamma_7$$

$$f_J(r) \sim r^J \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0$$

- В результате взаимодействия поля Хиггса с полем вихря, первое получает ненулевое вакуумное среднее в коре вихря и стремится к нулю вне вихря.



- Взаимодействия фермионов с полем Хиггса дают фермионным нулевым модам ненулевые массы

$$m_J \sim \int r dr H(r) f_J(r)^2 \sim \sigma^{2J}$$

- $\sigma \simeq 0.1 \Rightarrow$ иерархия:

$$m_2 : m_1 : m_0 \sim \sigma^4 : \sigma^2 : 1 \sim 10^{-4} : 10^{-2} : 1$$

номер поколения \iff угловой момент

Чёрные дыры на Земле Апокалипсис сегодня?

Чёрные дыры на Земле Апокалипсис сегодня?

- “Обычные чёрные дыры”

$$R_H = 2 \frac{M_H}{M_{PL}}$$

для протона

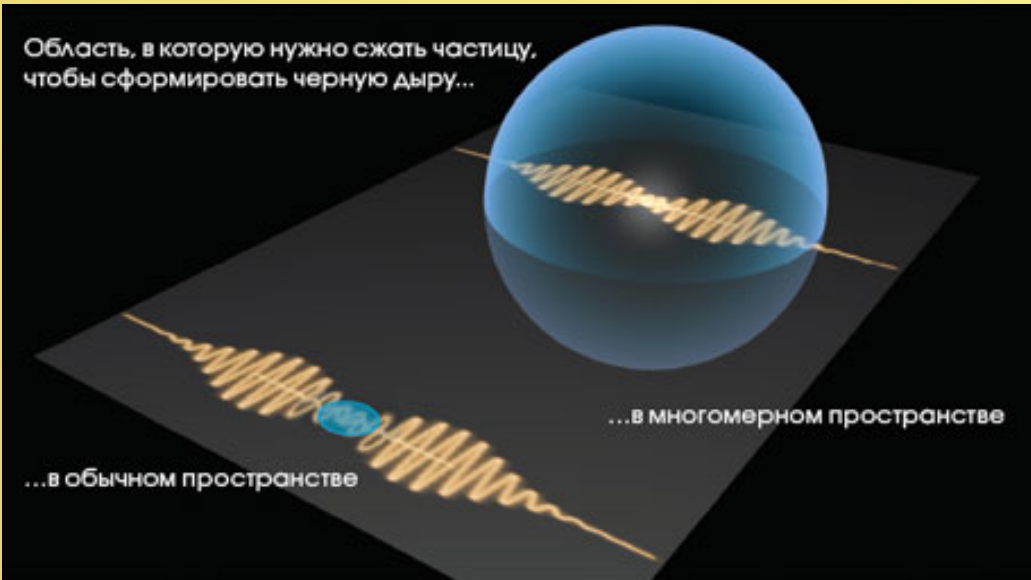
$$R_H \sim \frac{m_p}{M_{PL}} \simeq 10^{-19} L_{PL}$$

для тела с массой $M_{PL} = 10^{-5}$ г.

$$R_H \simeq L_{PL} \simeq 10^{-33} \text{ см}$$

$$\rho \simeq \frac{M_{PL}}{L_{PL}^3} \simeq 10^{95} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$$

Нужны планковские энергии!!!



В моделях с БДИ

$$M_{PL}^{(d)} \sim 1 \text{ ТэВ}, R_H \sim \left[\frac{M_H}{(M_{PL}^{(d)})^{d-2}} \right]^{\frac{1}{d-3}}$$

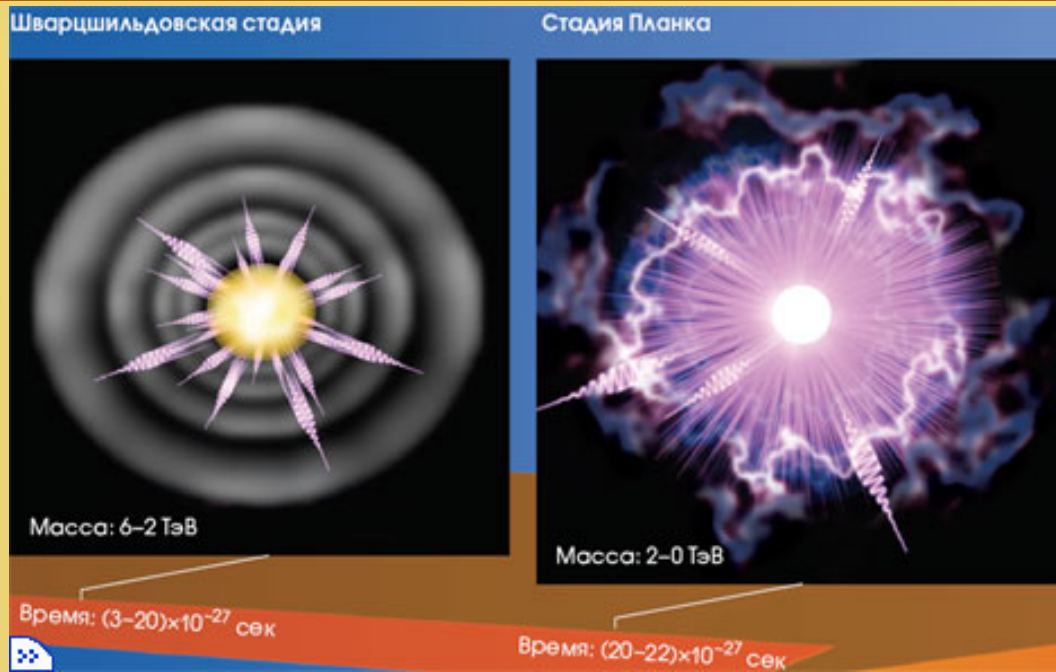
чёрные дыры могут рождаться на БАК

Сечение либо геометрическое

$$\sigma \sim \pi R_H^2$$

что соответствует рождению одной дыры в секунду, либо туннельное

$$\sigma \sim \exp \left(-2\pi \frac{M_H^2}{(M_{PL}^{(d)})^2} \right)$$



● Излучение чёрных дыр
(Хокинг 1975 г.)

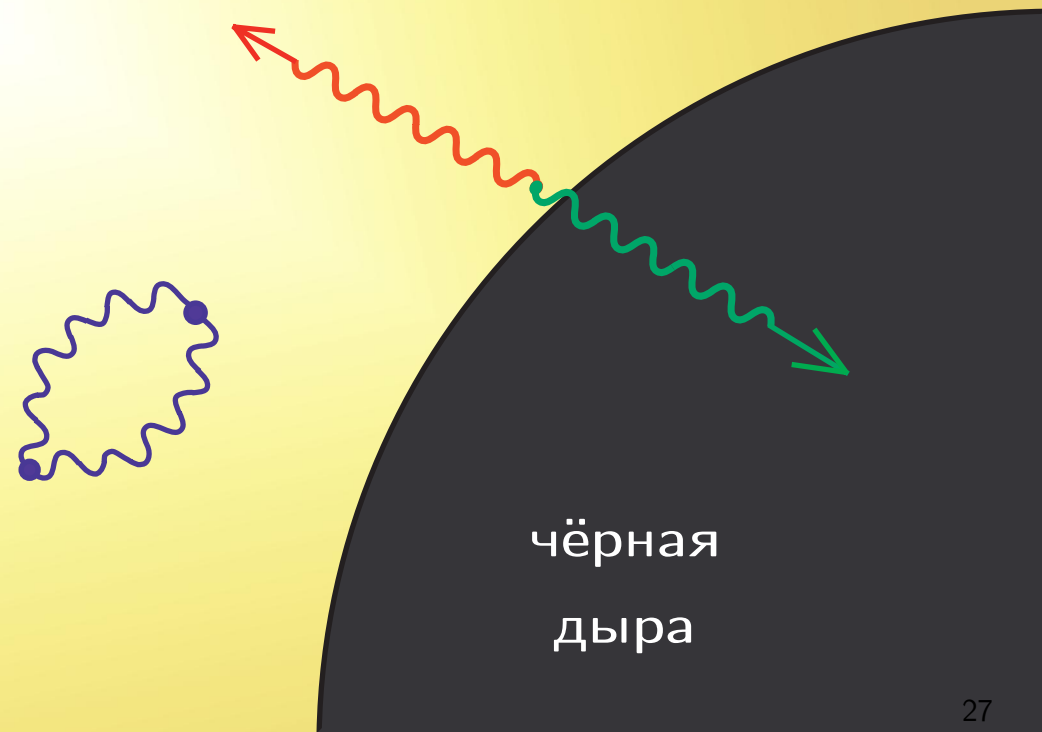
$$T_H \sim \frac{1}{R_H} \sim \left[\frac{(M_{PL}^{(d)})^{d-2}}{M_H} \right]^{\frac{1}{d-3}}$$

✓ мощность излучения

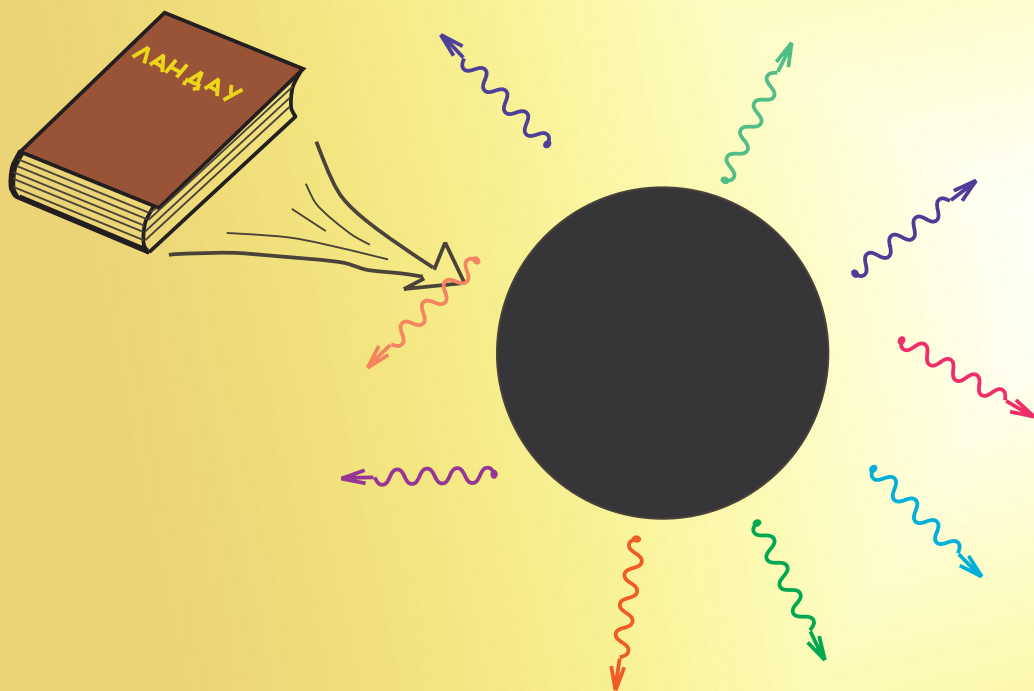
$$L \sim T_H^d R_H^{d-2} \sim T_H^4 R_H^2 \sim \frac{1}{R_H^2}$$

✓ время жизни

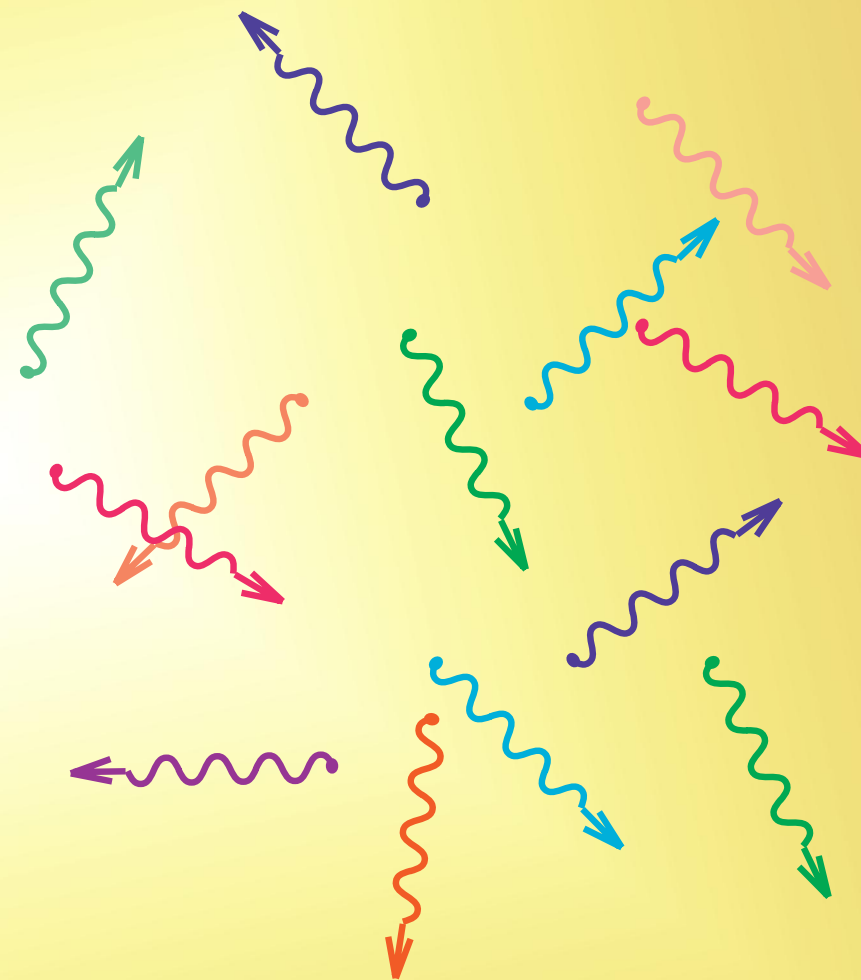
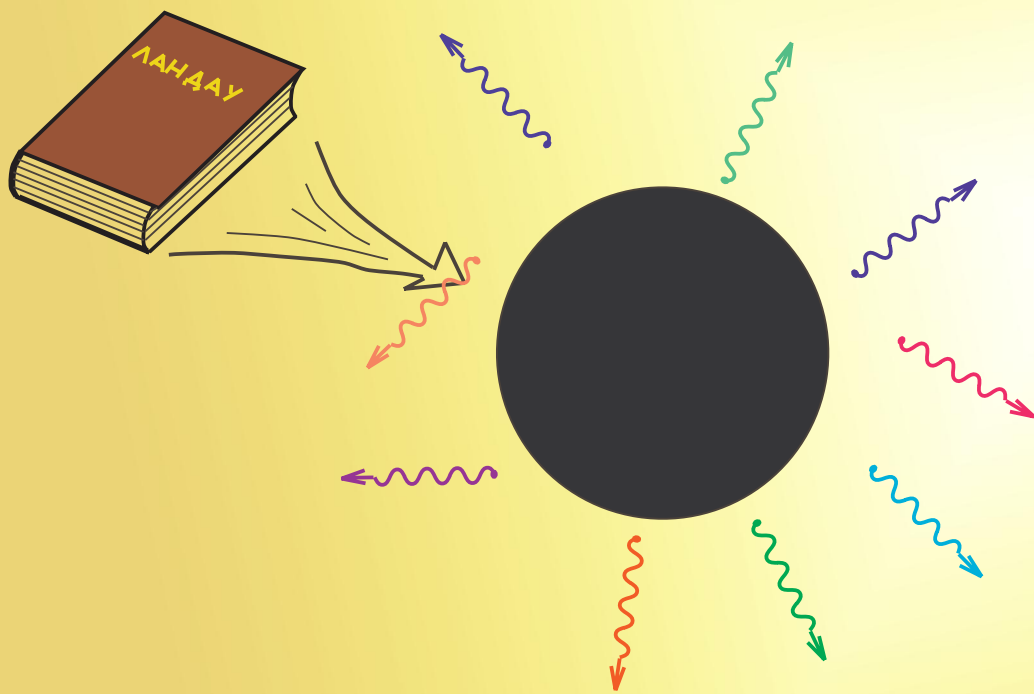
$$\tau_H \sim \frac{M_H}{L} \sim \frac{1}{M_{PL}^{(d)}} \left[\frac{M_H}{M_{PL}^{(d)}} \right]^{\frac{d-1}{d-3}} \sim 10^{-27} \text{ с}$$



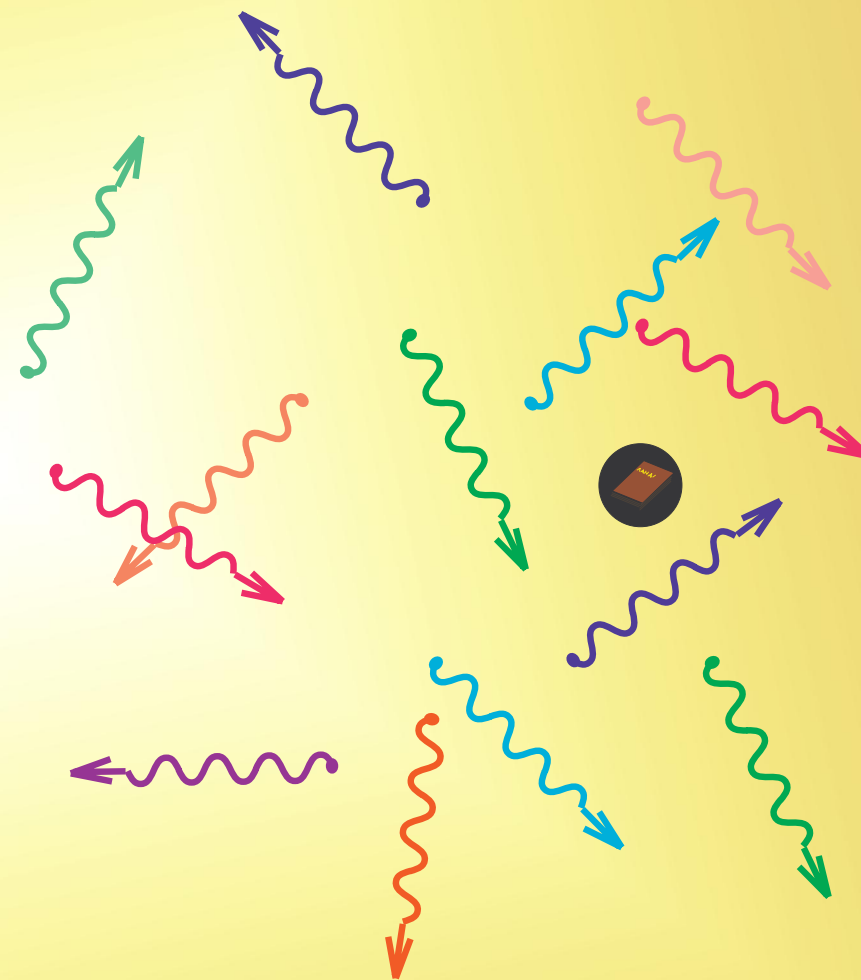
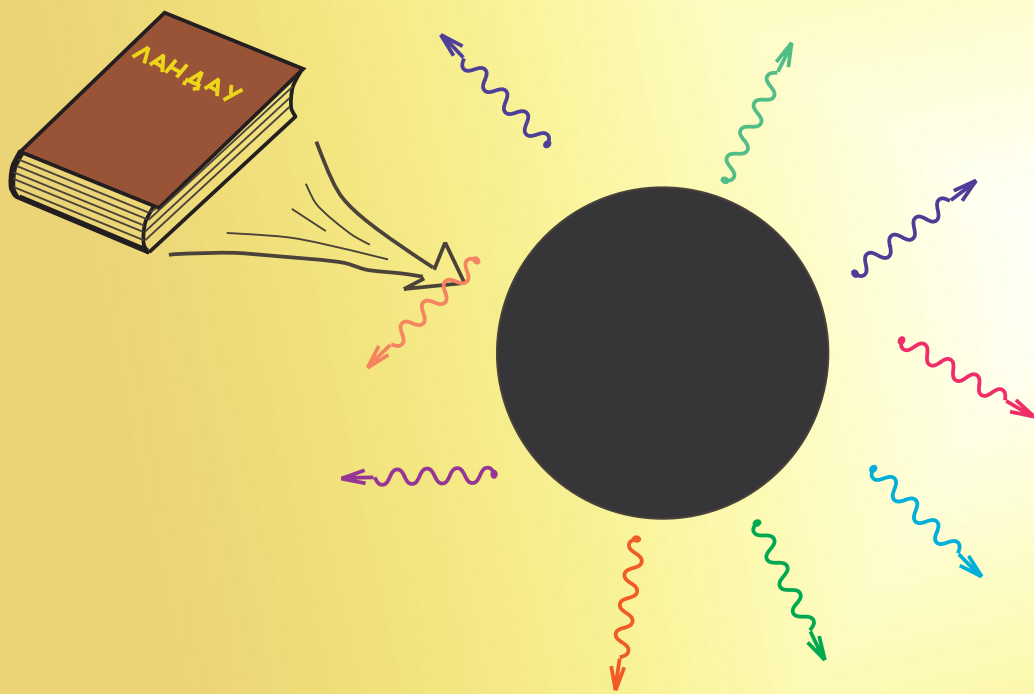
Информационный парадокс



Информационный парадокс



Информационный парадокс

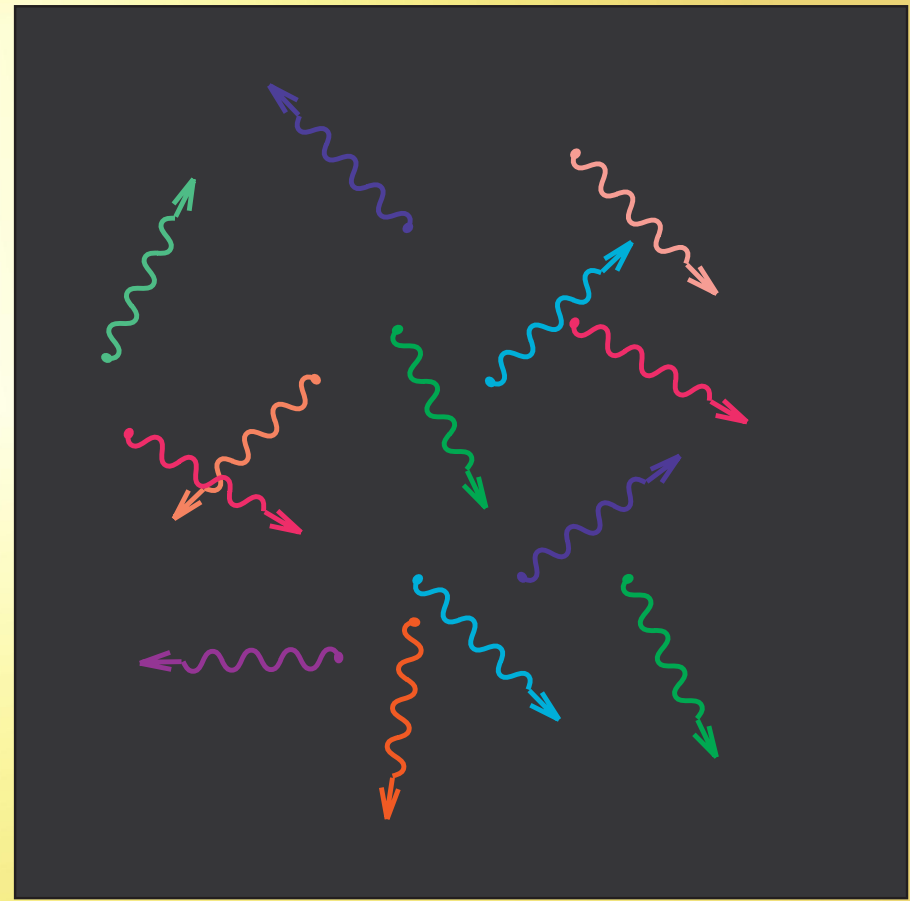


Апокалипсис

Если остатки чёрных дыр, рождённых на БАК, не исчезают, то они могут скапливаться в центре Земли, и тогда ...

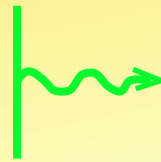


$10^6 \div 10^7$
лет



Ещё чёрные дыры

Первичные флуктуации
плотности → первичные
чёрные дыры



Космические лучи сверхвысоких
энергий

$$10^{19} \text{ эВ} = 10^7 \text{ ТэВ}$$

производят до 100 чёрных дыр в
год. Такие дыры не скапливаются
в Земле.

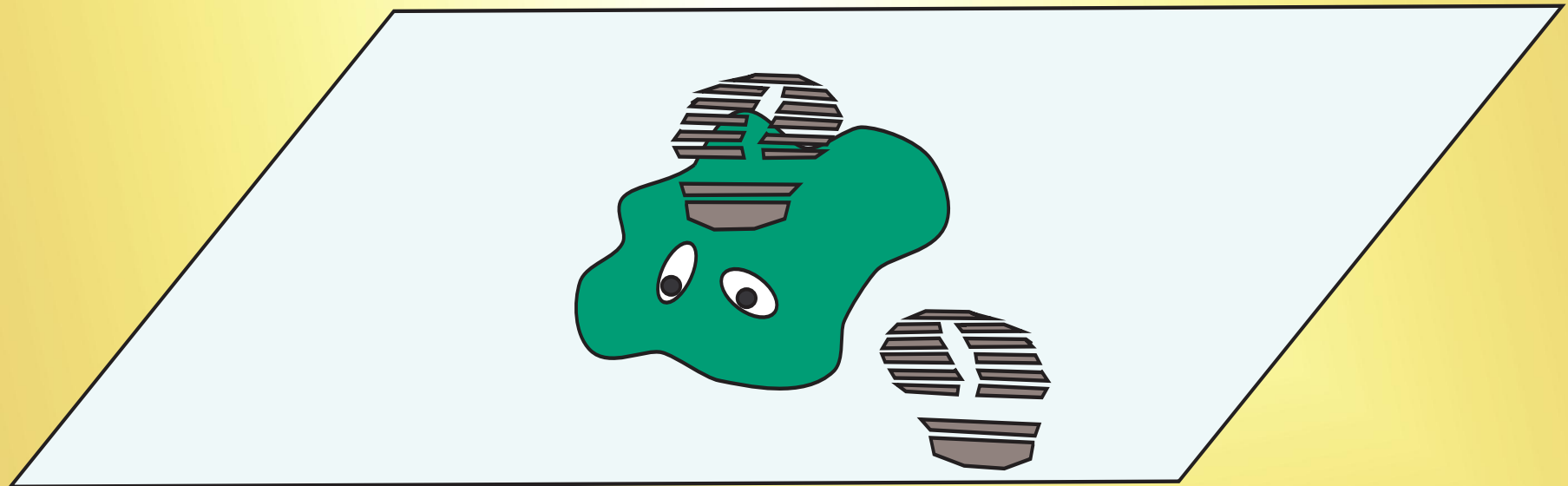
Заключение

- Большие дополнительные измерения могут объяснить многие актуальные вопросы современной физики, такие как
 - ✓ проблему калибровочной иерархии;
 - ✓ проблему происхождения фермионных поколений;
 - ✓ проблему иерархии фермионной массовой матрицы;
 - ✓ проблему массы нейтрино;
 - ✓ проблему космологической постоянной и темной материи;
 - ✓ ... и многие другие.

- Теории с большими дополнительными измерениями предсказывают множество новых явлений и эффектов, таких как
 - ✓ исчезновение частиц «в никуда»;
 - ✓ модификацию гравитации на сверхгалактических масштабах;
 - ✓ редкие процессы;
 - ✓ рождение квантовых чёрных дыр на ускорителях;
 - ✓ ... и многие другие.

- Теории с большими дополнительными измерениями предсказывают множество новых явлений и эффектов, таких как
 - ✓ исчезновение частиц «в никуда»;
 - ✓ модификацию гравитации на сверхгалактических масштабах;
 - ✓ редкие процессы;
 - ✓ рождение квантовых чёрных дыр на ускорителях;
 - ✓ ... и многие другие.
- Модели с большими дополнительными измерениями еще далеки от завершения:
 - 👉 до сих пор не построен приемлемый механизм локализации калибровочных полей;
 - 👉 не решена проблема сильной связи или возникновения духов в моделях с модифицированной гравитацией;
 - 👉 ... и многие другие.

Неудивительно, что эти модели интересны и увлекательны.



Неудивительно, что эти модели интересны и увлекательны.

Осталось только открыть дополнительные измерения...

